

Dans ce TP, on s'intéresse au problème du calcul numérique d'une intégrale

$$I_{a,b}(f) = \int_a^b f(t)dt$$

d'une fonction  $f$  continue sur le segment  $[a, b]$ . Ce problème intervient régulièrement en physique, mathématiques, biologie, et d'autres domaines encore, lorsqu'il n'est pas possible de calculer une primitive de  $f$ , même en ayant recours aux techniques de changements de variable, intégration par partie, et autres techniques d'intégration plus avancées.

Les méthodes que l'on considère se décomposent en deux étapes :

- (i) Une méthode de base pour calculer  $\hat{I}_{u,v}(f)$  une approximation de l'intégrale sur un petit intervalle  $[u, v]$ .
- (ii) Ensuite on utilise la relation de Chasles pour les intégrales : on considère une subdivision régulièrement espacée  $(u_0, u_1, \dots, u_n)$  de  $[a, b]$  (voir [figure 1.1](#)) et on calcule

$$\hat{I}_{a,b}^{(n)}(f) = \hat{I}_f(u_0, u_1) + \hat{I}_f(u_1, u_2) + \dots + \hat{I}_f(u_{n-1}, u_n)$$

C'est la généralisation dite *composite* de la méthode de base.

Les méthodes de base auxquelles nous allons nous intéresser sont dites des *de quadrature*, c'est-à-dire qu'elles conduisent à approcher l'intégrale par une somme pondérée finie de valeurs de  $f$  évaluée en différents points. Autrement dit, les méthodes de base calculent une approximation de la forme

$$\hat{I}_{u,v}(f) = (v - u) \cdot \sum_{k=0}^p \alpha_k f(x_k) \tag{1.1}$$

où les poids  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont des réels indépendants de  $f$ , et les  $x_i$  sont des réels de l'intervalle  $[u, v]$ .

L'erreur d'approximation est la différence entre  $I_{u,v}(f)$  et l'approximation de la méthode de base  $\hat{I}_{u,v}(f)$ , soit

$$E_{u,v}(f) = I_{u,v}(f) - \hat{I}_{u,v}(f)$$

L'erreur d'approximation composite est l'erreur pour l'approximation de la généralisation composite de la méthode de base, soit

$$E_{a,b}^{(n)}(f) = I_{a,b}(f) - \hat{I}_{a,b}^{(n)}(f)$$

Enfin, on dira qu'une méthode est d'ordre  $k$  lorsque l'erreur d'approximation est nulle si  $f$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$ .

On se donne ici la formule pour calculer le  $k$ -ième point de la subdivision régulière de  $[a, b]$  de taille  $n$

$$u_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

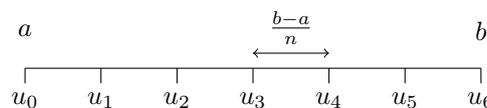


FIGURE 1.1 – Subdivision régulière de  $[0, 1]$  de taille 5

## 1.1 Méthode du rectangle

### 1.1.1 Méthode de base

La méthode du rectangle est la plus simple : elle consiste à approcher la fonction par une unique valeur qu'elle prend (en général à une des extrémités de l'intervalle). Ainsi, si l'on choisit l'extrémité gauche, l'approximation s'écrit

$$\hat{I}_{u,v}(f) = (v - u) \cdot f(u)$$

Avec la terminologie vue plus haut, cela revient à prendre  $p = 0$ ,  $\alpha_0 = 1$  et  $x_0 = u$

1. a) Que devient la formule pour  $\hat{I}(u, v)$  si l'on choisit plutôt l'extrémité droite ?  
b) Quel est l'ordre de la méthode du rectangle si l'on choisit l'extrémité gauche ? l'extrémité droite ?
2. a) Écrire une fonction `rectangle(f, u, v)` qui prend comme argument une fonction `f`, et des bornes `u` et `v`, et renvoie l'approximation de l'intégrale de `f` entre `u` et `v` donnée par la méthode du rectangle.  
b) Tester la fonction avec `sin(x)` entre 3 et 4.  
c) Calculer l'erreur pour l'exemple précédent.

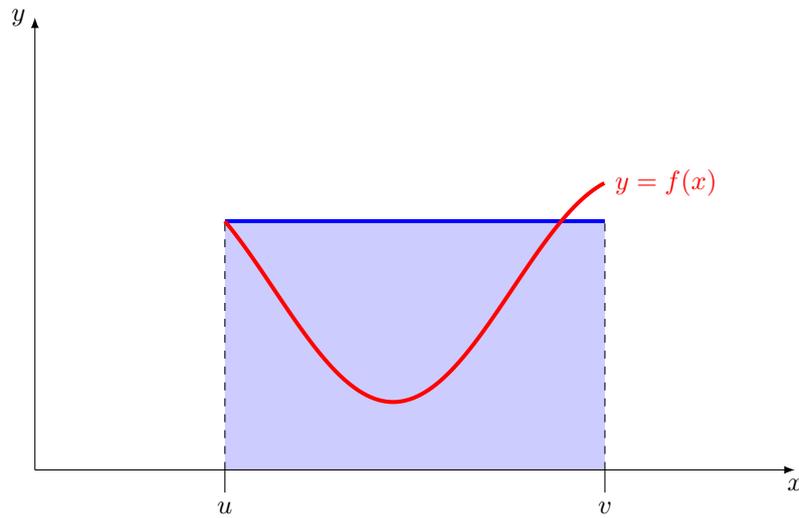


FIGURE 1.2 – Méthode du rectangle pour l'extrémité gauche

### 1.1.2 Méthode du rectangle composite

La généralisation composite de la méthode du rectangle applique la méthode du rectangle à chaque subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ . En utilisant l'extrémité gauche, cela s'écrit donc

$$\begin{aligned}\hat{I}_{a,b}^{(n)}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k)(u_{k+1} - u_k) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\end{aligned}$$

C'est essentiellement la forme d'une intégrale de Riemann !

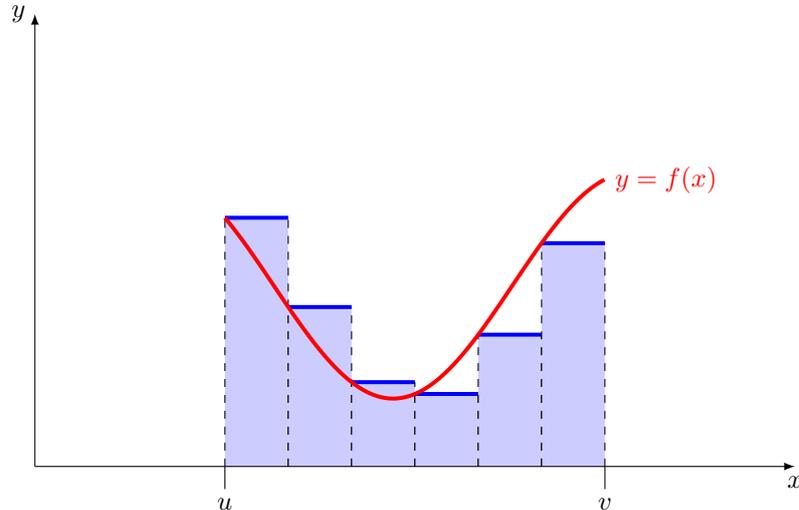


FIGURE 1.3 – Méthode composite du rectangle pour l'extrémité gauche

3. a) Écrire une fonction `rectangle_composite(f, a, b, n)` qui calcule l'approximation de l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  pour la méthode du rectangle composite, avec une subdivision de taille  $n$ . On pourra utiliser la fonction `np.linspace` (cherchez la documentation en ligne pour comprendre comment elle fonctionne).

b) Calculer l'erreur avec la même fonction test qu'avant, pour des subdivisions de taille 10, 100 et 1000.

## 1.2 Méthode du point milieu

### 1.2.1 Méthode de base

Une amélioration simple de la méthode du rectangle consiste à utiliser la valeur du milieu de l'intervalle, plutôt que celle d'une des extrémités. Cela constitue la méthode du point milieu. Ainsi, la formule d'approximation de  $I_{u,v}(f)$  s'écrit

$$\hat{I}_{u,v}(f) = (v - u)f\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

4. a) Quel est l'ordre de la méthode du point milieu ?

b) Implémenter une fonction `point_milieu(f, u, v)`. Calculer l'erreur avec la même fonction test que précédemment.

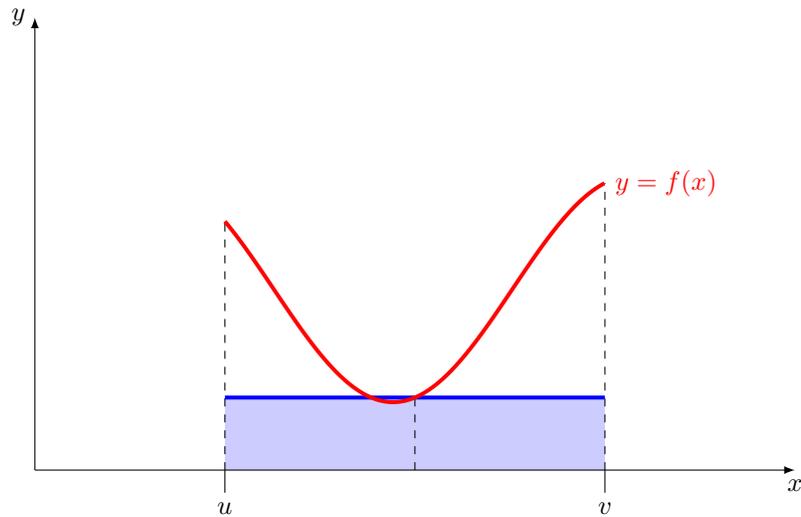


FIGURE 1.4 – Méthode du point milieu

### 1.2.2 Méthode du point milieu composite

La généralisation composite de la méthode du point milieu applique la méthode du point milieu à chaque subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ . Cela s'écrit

$$\begin{aligned}\hat{I}_{a,b}^{(n)}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{u_k + u_{k+1}}{2}\right)(u_{k+1} - u_k) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)\end{aligned}$$

5. a) Écrire une fonction `point_milieu_composite(f, a, b, n)` qui calcule l'approximation de l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  pour la méthode du point milieu composite, avec une subdivision de taille  $n$ .

b) Calculer l'erreur avec la même fonction test qu'avant, pour des subdivisions de taille 10, 100 et 1000. Comparez avec la méthode du rectangle.

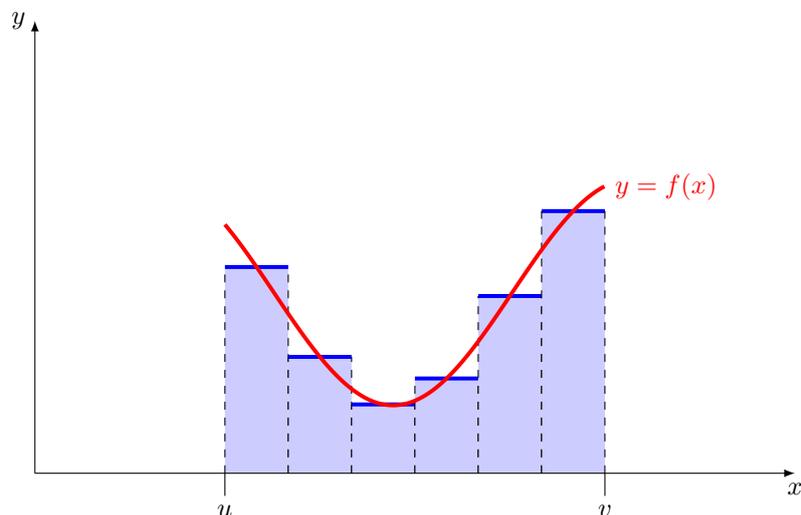


FIGURE 1.5 – Méthode composite du point milieu

## 1.3 Méthode du trapèze

### 1.3.1 Méthode de base

La méthode du trapèze choisit de considérer que  $f$  n'est non plus constante sur l'intervalle  $[u, v]$  mais affine. Ainsi, avec cette méthode, on approxime  $I_{u,v}(f)$  par  $I_{u,v}(\hat{f})$  où  $\hat{f}$  est l'approximation affine de  $f$  sur  $[u, v]$ , c'est-à-dire que

$$\hat{f} : x \mapsto f(u) + (x - u) \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

6. a) Calculer  $\hat{I}_{u,v}(f) = I_{u,v}(\hat{f})$ . L'écrire sous la forme de [équation 1.1](#)
- b) Quel est l'ordre de la méthode du trapèze ?
- c) Écrire une fonction `trapeze(f, u, v)`. La tester comme précédemment.

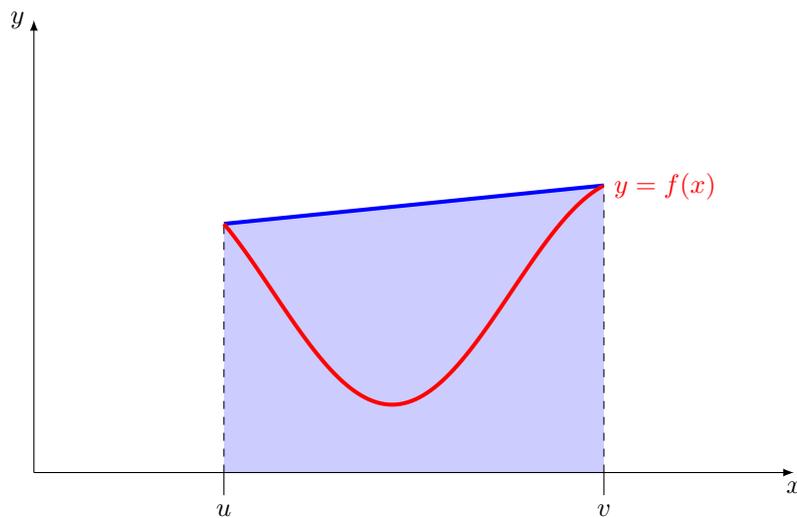


FIGURE 1.6 – Méthode du trapèze

### 1.3.2 Méthode composite du trapèze

7. a) Écrire une fonction `trapeze_composite(f, a, b, n)` qui calcule l'approximation de l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  pour la méthode du trapèze composite, avec une subdivision de taille  $n$ .
- b) Calculer l'erreur avec la même fonction test qu'avant, pour des subdivisions de taille 10, 100 et 1000. Comparez avec les méthodes précédentes.

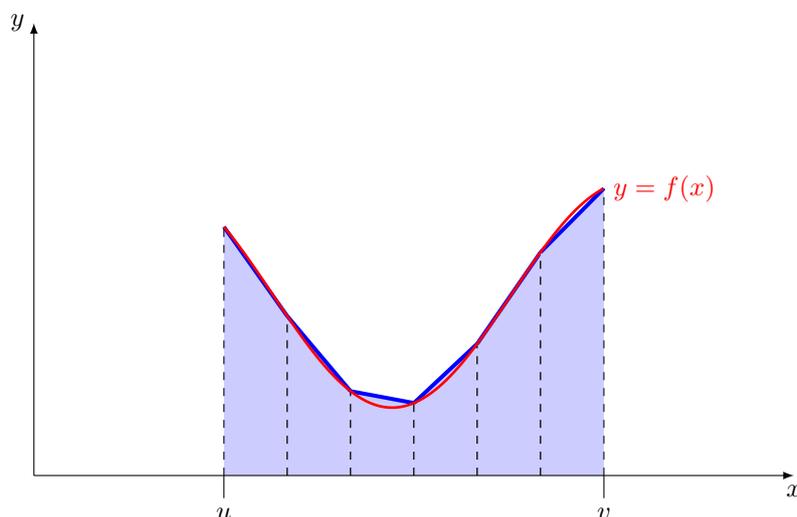


FIGURE 1.7 – Méthode composite du point milieu

## 1.4 Généralisation

Les méthodes du rectangle et du point milieu considèrent que  $f$  est un polynôme de degré 0 entre les bornes. La méthode du trapèze considère que  $f$  est un polynôme de degré 1. Il est naturel de continuer ainsi pour des degrés supérieurs. La méthode suivante est celle de SIMPSON, qui approxime donc  $f$  par son interpolée de LAGRANGE en  $u$ ,  $\frac{u+v}{2}$  et  $v$ . On peut alors montrer que cette interpolation conduit à l'approximation de l'intégrale

$$\hat{I}_{u,v}(f) = (v - u) \cdot \left( \alpha_0 f(u) + \alpha_1 f\left(\frac{u+v}{2}\right) + \alpha_2 f(v) \right)$$

avec  $\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{6}$  et  $\alpha_1 = \frac{4}{6}$ . On pourrait s'attendre à ce que la méthode de Simpson soit d'ordre 2, mais elle est en fait d'ordre 3, ce qui la rend encore meilleure.

En fait, chacune des méthodes que nous avons étudiées sont des cas particuliers des méthodes de NEWTON-CÔTES, basées sur l'interpolation de Lagrange de  $f$  pour des partitionnements régulièrement espacés de  $[u, v]$ . Même si en théorie les méthodes d'ordre supérieures fournissent une meilleure approximation de  $I(f)$ , elles souffrent plus fortement des erreurs d'approximation machine dues au fait que les ordinateurs ne manipulent pas des réels mais des approximations des réels (dits *nombres flottants*). En pratique, la méthode de SIMPSON est un bon compromis et la plus utilisées des méthodes de NEWTON-CÔTES.

## 1.5 Bornes sur les erreurs d'approximation

Pour quantifier les comparaisons qualitatives entre les différentes méthodes vues jusqu'ici, on donne les bornes suivantes sur les erreurs d'approximation. Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^4$  sur  $[a, b]$ , notons

$$\begin{cases} M_1 = \sup_{[a,b]} |f'| \\ M_2 = \sup_{[a,b]} |f''| \\ M_3 = \sup_{[a,b]} |f^{(3)}| \\ M_4 = \sup_{[a,b]} |f^{(4)}| \end{cases}$$

Alors les erreurs d'approximation ont les bornes suivantes

$$\begin{array}{ll} |E_{u,v}(f)| \leq M_1 \frac{(v-u)^2}{2} & \text{pour la méthode du rectangle} \\ |E_{u,v}(f)| \leq M_2 \frac{(v-u)^3}{24} & \text{pour la méthode du point milieu} \\ |E_{u,v}(f)| \leq M_2 \frac{(v-u)^3}{12} & \text{pour la méthode du trapèze} \\ |E_{u,v}(f)| \leq M_4 \frac{(v-u)^5}{2880} & \text{pour la méthode de Simpson} \end{array}$$

8. En déduire une borne sur l'erreur des généralisations composites avec une subdivision de taille  $n$ , pour chacune des méthodes précédentes.