BCPST 1 — Lycée Fénelon — 2022-2023 — Informatique

Corrigé du TP n°14
Intégration numérique

2.1 Méthode du rectangle

2.1.1 Méthode de base

1. a) $\hat{I}(u,v) = (u-v) \cdot f(v)$ pour la méthode des rectangles avec l'extrêmité droite.

b) On montre que la méthode des rectangles est d'ordre 0 pour l'extrêmité gauche (c'est également le cas pour l'extrêmité droite, et la preuve est similaire).

Soit $f \in \mathbb{P}_0[X]$ un polynôme de degré $\leqslant 0$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x,\ f(x) = c$. On calcule alors

$$I_{u,v}(f) = \int_u^v c\, dt = c \cdot (u-v)$$

D'autre part

$$\hat{I}_{u,v}(f) = f(u) \cdot (u-v) = c \cdot (u-v)$$

Et ainsi $I_{u,v}(f)$ et $\hat{I}_{u,v}(f)$ coïncident, ce que montre que la méthode des rectangles est d'ordre au moins 0.

Reste à montrer qu'elle n'est pas d'ordre 1. Un contre-exemple suffit, par exemple $f : x \mapsto x$, pour laquelle on a

$$I_{0,1}(f) = \frac{1}{2}$$
$$\hat{I}_{0,1}(f) = 0$$

ce qui conclut.

2. a)

```python
def rectangle(f, u, v):
    return (v-u) * f(u)
```

2.1.2 Méthode du rectangle composite

3. a)

```python
def rectangle_composite(f, a, b, n):
    x = np.linspace(a, b, n)

    tot = 0
    for u, v in zip(x[:-1], x[1:]):
        tot += rectangle(f, u, v)

    return tot
```

2.2 Méthode du point milieu

2.2.1 Méthode de base

4. a) On montre que la méthode du point milieu est d'ordre 1.

Soit donc $f \in \mathbb{P}_1[X]$, soit $f(x) = ax + b$ pour un certain $a, b \in \mathbb{R}$. On montre que $I_{u,v}(f)$ et $\hat{I}_{u,v}(f)$ coïncident :

$$\begin{aligned} I_{u,v}(f) &= \int_u^v ax + b\, dx \\ &= b \cdot (v-u) + a\frac{v^2 - u^2}{2} \\ \hat{I}_{u,v}(f) &= (v-u) \cdot (a\frac{u+v}{u} + b) \\ &= b \cdot (v-u) + a\frac{v^2-u^2}{2} \end{aligned}$$

Reste à trouver un contre-exemple pour f un polynôme de degré 2. Par exemple $f(x) = x^2$, $u = -1$ et $v = 1$.

b)

```python
def point_milieu(f, u, v):
    return (v-u) * f((u+v)/2)
```

2.2.2 Méthode du point milieu composite

5. a)

```python
def point_milieu_composite(f, a, b, n):
    x = np.linspace(a, b, n)

    tot = 0
    for u, v in zip(x[:-1], x[1:]):
        tot += point_milieu(f, u, v)

    return tot
```

2.3 Méthode du trapèze

2.3.1 Méthode de base

La méthode du trapèze choisit de considérer que f n'est non plus constante sur l'intervalle $[u, v]$ mais affine. Ainsi, avec cette méthode, on approxime $I_{u,v}(f)$ par $I_{u,v}(\hat{f})$ où $\hat{f}$ est l'approximation affine de f sur $[u, v]$, c'est-à-dire que

$$\hat{f} : x \mapsto f(u) + (x-u)\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$$

6. a) Il s'agit de calculer l'aire sous le segment qui joint $(u, f(u))$ à $(v, f(v))$. Géométriquement, on peut voir assez facilement que cette aire est $(v-u) \cdot \frac{f(u)+f(v)}{2}$. On le vérifie par le calcul :

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{u,v}(f) &= I_{u,v}(\hat{f}) \\
&= \int_u^v f(u) + (x-u)\frac{f(v)-f(u)}{v-u}\,dx \\
&= (v-u)\cdot f(u) + \frac{f(v)-f(u)}{v-u}\frac{(v-u)^2}{2} \\
&= (v-u)\cdot\left(f(u) + \frac{v-u}{2}\frac{f(v)-f(u)}{v-u}\right) \\
&= (v-u)\cdot\left(f(u) + \frac{f(v)-f(u)}{2}\right) \\
&= (v-u)\cdot\frac{f(u)+f(v)}{2}
\end{aligned}$$

b) On montre que la méthode du trapèze est d'ordre 1, comme la méthode du point milieu.
Soit donc $f \in \mathbb{P}_1[X]$, soit $f(x) = ax+b$ pour un certain $a, b \in \mathbb{R}$. On montre que $I_{u,v}(f)$ et $\hat{I}_{u,v}(f)$ coïncident :

$$\begin{aligned}
I_{u,v}(f) &= \int_u^v ax+b\,dx \\
&= b\cdot(v-u) + a\frac{v^2-u^2}{2} \\
&= (v-u)\cdot\left(a\frac{u+v}{2}+b\right) \\
\hat{I}_{u,v}(f) &= (v-u)\cdot\frac{au+b+av+b}{2} \\
&= (v-u)\cdot\left(a\frac{u+v}{2}+b\right)
\end{aligned}$$

Reste à trouver un contre-exemple pour f un polynôme de degré 2. Par exemple $f(x) = x^2$, $u = -1$ et $v = 1$.

c)

```python
def trapeze(f, u, v):
    return (v-u) * (f(u) + f(v))/2
```

2.3.2 Méthode composite du trapèze

7. a)

```python
def trapeze_composite(f, a, b, n):
    x = np.linspace(a, b, n)

    tot = 0
    for u, v in zip(x[:-1], x[1:]):
        tot += trapeze(f, u, v)

    return tot
```

2.4 Bornes sur les erreurs d'approximation

8. Par exemple pour la méthode des rectangles composite on écrit

$$\begin{aligned}|E_{a,b}(f)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |E_{u_k,u_{k+1}}(f)| \\ &\leqslant n \cdot M_1 \frac{(\frac{b-a}{n})^2}{2} \\ &\leqslant M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}\end{aligned}$$

Cela fonctionne pareil pour les autres méthodes, et on trouve finalement

$$\begin{aligned}|E_{a,b}(f)| &\leqslant M_1 \frac{(v-u)^2}{2n} && \text{pour la méthode du rectangle} \\ |E_{a,b}(f)| &\leqslant M_2 \frac{(v-u)^3}{24n^2} && \text{pour la méthode du point milieu} \\ |E_{a,b}(f)| &\leqslant M_2 \frac{(v-u)^3}{12n^2} && \text{pour la méthode du trapèze} \\ |E_{a,b}(f)| &\leqslant M_4 \frac{(v-u)^5}{2880n^4} && \text{pour la méthode de Simpson}\end{aligned}$$