Exercices de khôlles

Gabriel Belouze

Contents

Ressources

Quelques sites pour trouver des exercices

· Michel Quercia

· Marc Sage

· Thomas Budzinski

· Gery Huvent

· Bibmath

· Maths France

· Denis Conduché

Chapter 1

Preliminaries

1.1 Calculus – integration and usual functions

Exercise 1.1.1. *Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Proof. $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ pour l'existence. $f = p + i$ donne $f(x) + f(-x) = p(x) + p(-x) = 2p(x)$ pour l'unicité. □

Exercise 1.1.2. *On se donne $a \in]0, 2\ \pi\ [$. Calculer $\prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{a}{2^k})$.*

Proof. On part de $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ pour avoir

$$\sin(2^n a) = 2^n \sin(a) \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k a)$$

D'où $\prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{a}{2^k}) = \frac{sin(2^n a)}{2^n}$. □

Exercise 1.1.3. *Montrer que dans un triangle ABC, $\frac{\sin \hat{a}}{a} = \frac{\sin \hat{b}}{b} = \frac{\sin \hat{c}}{c}$.*

Proof. On projette C pour avoir un segment de longueur h vérifiant $\sin(a) = \frac{h}{b}$ et $\sin(b) = \frac{h}{a}$ d'où le résultat. □

Exercise 1.1.4. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation*

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$$

Proof. En prenant la tangente on a

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(2x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(2x))} &= 1 \\
\frac{3x}{1 - 2x^2} &= 1 \\
2x^2 + 3x - 1 &= 0 \\
x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}
\end{aligned}$$

On note $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} < 0$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} > 0$. En remontant les implications, on a $\arctan(x_i) + \arctan(2x_i) = \frac{\pi}{4} \mod \pi$.

Remarquons que $\phi : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(2x)$ est négative sur $\mathbb{R}_-$, positive sur $\mathbb{R}_+$, et comprise entre $-\pi$ et π. Ainsi $\phi(x_1) < 0$ donc x_1 n'est pas solution de l'équation initiale. D'autre part, $\phi(x_2) \in [0, \pi]$. La seule valeur possible est $\phi(x_2) = \pi/4$. $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ est l'unique solution de l'équation. □

Exercise 1.1.5 (Formule de Machin)**.** *Montrer la formule*

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$$

Proof. On passe par les complexes

$$\begin{aligned}
Arg(\frac{(5+i)^4}{239+i}) &= Arg((5+i)^4(239-i)) \\
&= Arg((24+10i)^2(239-i)) \\
&= Arg((476+480i)(239-i)) \\
&= Arg(114244+114244i) \\
&= Arg(1+i) \\
&= \frac{pi}{4}
\end{aligned}$$

□

Exercise 1.1.6. *Donner le nombre de solutions de* $\tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = a$ *dans* $[0, \pi]$ *selon* $a \in \mathbb{R}$.

Proof. Les points limites sont $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi/4}{,} \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$. Par ailleurs, $f(0) = f(\pi) = 0$, f est strictement croissante sur chaque intervalle de définition, bref l'équation possède 9 solutions si $a \neq 0$ et 10 si $a = 0$ □

Exercise 1.1.7.

1. *Résoudre pour* $x \in [0, 2\pi]$, *l'équation* $\cos(3x) = \sin(2x)$.

2. *En déduire une expression des* cos *et* sin *de* $\{\frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}\}$.

Proof.

1.

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\pi/2 - 2x)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pi/2 - 2x \mod 2\pi \\ 3x = 2x - \pi/2 \mod 2\pi \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/10 \mod 2\pi/5 \\ x = 3\pi/2 \mod 2\pi \end{cases}\end{aligned}$$

Les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10}$.

2. On commence par factoriser $\cos(3x)$

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \Re(e^{3ix})\\ &= \Re((\cos(x) + i\sin(x))^3)\\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)\end{aligned}$$

Ainsi $x_1 = \pi/10$ et $x_2 = 13\pi/10$ vérifient

$$\begin{aligned}4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 2\cos(x)\sin(x)\\ 4(1 - \sin^2(x)) - 2\sin(x) - 3 = 0\end{aligned}$$

Et de là $X_1 = \sin(\pi/10)$ et $X_2 = \sin(13\pi/10) = -\sin(3\pi/10)$ sont les 2 racines de $4X^2+2X-1$
De là

$$\begin{aligned}\sin(\pi/10) &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\\ \sin(3\pi/10) &= \frac{\sqrt{5}+1}{4}\end{aligned}$$

Et ensuite ça déroule.

□

Exercise 1.1.8. *Montrer que* $\arctan(\frac{1}{\sqrt{x}}) = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{x+1}})$ *pour* $x > 0$.

Proof. On passe à la tangente

$$\begin{aligned}
\tan(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{x+1}})) &= \frac{\sin(\arcsin(1/\sqrt{x+1}))}{\sqrt{(1-\sin^2(\arcsin(1/\sqrt{x+1})))}} \\
&= \frac{1/\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-1/(x+1)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&= \tan(\arctan(\frac{1}{\sqrt{x}}))
\end{aligned}$$

□

Exercise 1.1.9. *Montrer que* $\frac{1}{sh(x)} = \frac{1}{th(\frac{x}{2})} - \frac{1}{th(x)}$. *En déduire une expression simple de* $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{sh(2^k x)}$.

Exercise 1.1.10. *Soit* $\forall a, b, x \in \mathbb{R}_+^*$, $a < b$,

$$0 < be^{-ax} - ae^{-bx} < b - a$$

Proof. $be^{-ax} - ae^{-bx} > be^{-ax} - ae^{-ax} > 0$. De l'autre côté, on dérive $f'(x) = ab(e^{-bx} - e^{-ax}) < 0$ donc $f(x) <= f(0) = b - a$. □

Exercise 1.1.11. *Étudier la monotonie sur* $\mathbb{R}_+^*$, *pour* a, b *réels, de* $\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

Proof. Sans perte de généralité, $a < b$. On dérive deux fois. □

Exercise 1.1.12. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Trouver une primitive de* $\frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x)) \ldots \ln^{\circ n}(x)}$.

Proof. $ln^{\circ n}(x)$ par récurrence. □

Exercise 1.1.13. *Calculer* $\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

Exercise 1.1.14. *Trouver une primitive de* $\frac{1}{\sqrt{-x^2+x+1}}$.

Proof.

$$\begin{aligned}
\int^t \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}} dx &= \int^t \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{-(\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{5}})^2 + 1}} dx \\
&= \int^{2(u-1/2)/\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\
&= \arcsin(\frac{2u-1}{\sqrt{5}})
\end{aligned}$$

□

Exercise 1.1.15. *Calculer* $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$. *On pourra introudire* $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx$.

Proof. Par un changement de variable évident, $I = J$. Donc $2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)/2)dx = -\ln(2)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))dx = -\ln(2)\frac{\pi}{2} + I$ d'où

$$I = -\ln(2)\frac{\pi}{2}$$

. □

Exercise 1.1.16. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, telle que le graphe de* f *possède deux centres de symétrie distincts. Montrer que* f *peut se décomposer comme somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.*

Proof. Quitte à retirer la bonne fonction affine à f, on peut supposer que les deux centres de symétrie sont situés sur l'axe des x, respectivement en a et en b. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(b - (b - x)) \\ &= f(2b - x) \\ &= f(a - (a - 2b + x)) \\ &= f(x + 2(a - b)) \end{aligned}$$

Donc $f - \delta$ est $a - b$ périodique avec δ affine. □

Exercise 1.1.17. *Soit* $a > b$ *des réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le système*

$$\begin{cases} ch(x) + ch(y) = a \\ sh(x) + sh(y) = b \end{cases}$$

admette au moins une solution.

Exercise 1.1.18. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, on suppose que* $f \circ f$ *est croissante et que* $f \circ f \circ f$ *est strictement décroissante. Montrer que* f *est strictement décroissante.*

Proof. $f \circ f$ est strictement croissante, sinon $f \circ f \circ f$ n'est pas strictement décroissante. Soit $a < b$, $f(f(f(a))) < f(f(f(b)))$ donc par croissance de $f \circ f$, $f(a) < f(b)$. □

Exercise 1.1.19. *Calculer exactement* $\sin(\frac{1}{2}\arcsin(\frac{3}{4}))$.

Exercise 1.1.20 (formule de Hutton)**.** *Montrer la formule*

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7})$$

Proof. Par les complexes ou bien avec les formules de trigonométrie. □

1.2 Sets and maps

Exercise 1.2.1.

1. *Soit* A, B *des parties de* E. *Résoudre pour* $X \in E$ *l'équation* $X \bigcup A = X \bigcap B$.

2. *Soit* A, B *des parties de* E. *Résoudre pour* $X \in E$ *l'équation* $X \bigcup A = \overline{X} \bigcap B$.

Proof. 1. On a toujours $A \subset X \bigcup A$ et $X \bigcap B \subset B$. Une condition nécessaire à l'existence de solution est donc $A \subset B$. De plus si X est solution, pour avoir l'inclusion du membre de gauche dans celui de droite, il faut $X \subset B$. L'équation se réécrit alors: $X \bigcup A = X$, soit $A \subset X$. Ainsi on trouve $\mathcal{S} = \{A \bigcup Y \mid Y \in (B \setminus A)\}$.

2. Analyse : soit X solution. $\emptyset = X \bigcap (\overline{X} \bigcap B) = X \bigcap (X \bigcup A) = X$. Synthèse : $\emptyset$ est solution si et seulement si $A = B$.

$\square$

Exercise 1.2.2. *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite. On dit que* (u_n) *est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \ \in \mathbb{N},\ \forall n, p > N,\ |u_n - u_p| < \varepsilon$$

1. *Comparer cette définition avec*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \ \in \mathbb{N},\ \forall p > n,\ |u_n - u_p| < \varepsilon$$

2. *Exprimer le caractère borné d'une suite à l'aide de quantificateurs. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.*

3. *Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.*

4. *Comparer la définition d'une suite de Cauchy avec la suivante*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ |u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$$

Exercise 1.2.3. *Soit* $x_1,\ \ldots,\ x_p$ *des entiers tels que pour tout* k, $0 \leq x_k \leq k$ *et* $x_p \neq 0$. *La suite finie* $(x_1,\ \ldots,\ x_p)$ *s'appelle l'écriture factorielle de l'entier* $n = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k k!$. *Montrer que cette écriture existe et est unique pour tout entier naturel* n.

Exercise 1.2.4. *Soit* $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. *Trouver les entiers* $n \in \mathbb{N}$ *pour lesquels* u_n *est pair.*

Exercise 1.2.5. *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite. On définit la* $\sigma(u_n)$ *comme l'ensemble des valeurs prises une infinité de fois par* (u_n). *Exprimer* $\sigma(u_n)$ *à l'aide de quantificateurs, puis à l'aide d'opérations ensemblistes sur les* $U_n = \{u_i \mid i \geq n\}$.

Exercise 1.2.6. *Montrer que le raisonnement par récurrence est valide, i.e.*

$$(P(0) \ et \ (P(n) \Rightarrow P(n+1))) \models \forall n,\ P(n)$$

Exercise 1.2.7. *Soit A et B deux parties de E. Considérons*

$$\phi \longmapsto \begin{cases} P(E) & \to & P(A) \times P(B) \\ X & \mapsto & (A \bigcap X, B \bigcap X) \end{cases}$$

1. *Montrer que ϕ est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.*
2. *Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit surjective.*
3. *On suppose que ϕ est bijective. Calculer ϕ^{-1}.*

*Difficulté : **

Proof. 1. ($\Rightarrow$) On raisonne par contraposée en se donnant $x \in E \setminus A \cup B$. Alors $\forall X$, $\phi(X) = \phi(X \cup \{x\})$ d'où la non injectivité.
($\Leftarrow$) Par contraposée encore. Soit X et Y de même image par ϕ, et par exemple soit $x \in X \setminus Y$. Il est immédiat que $x \notin A$ et $x \notin B$.

2. La condition est $A \bigcap B = \emptyset$.

3. $$\phi^{-1} \longmapsto \begin{cases} P(A) \times P(B) & \to & P(E) \\ (X_1, Y_1) & \mapsto & X_1 \cup Y_1 \end{cases}$$

□

Exercise 1.2.8. *Soit $E = \{x_1, \ldots, x_p\}$. Prouver que l'on peut ordonner les éléments de $P(E)$ en respectant les 4 règles suivantes :*

- *on commence par $\emptyset$,*
- *on termine par un singleton,*
- *chaque élément de $P(E)$ apparaît une et une seule fois,*
- *chaque terme de la suite est obtenu par l'ajout ou le retrait d'un seul élément au terme précédent.*

*Difficulté : **

Proof. On prouve le résultat par récurrence. Soit $\emptyset = a_1, \ldots, a_{2^p} = \{x_p\}$ une suite de parties convenable associée à $E = x_1, \ldots, x_p$. Une suite convenable associée à $E \cup \{x_{p+1}\}$ est alors

$$a_1, \ldots, a_{2^p}, a_{2^p} \cup \{x_{p+1}\}, \ldots, a_1 \cup \{x_{p+1}\} = \{x_{p+1}\}$$

. □

Exercise 1.2.9. *Trouver une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Difficulté : ***

Proof. On note $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$. On considère alors la bijection

$$\phi :\ x \longmapsto \begin{cases} m + x_{n+1} \text{ si } x \text{ est de la forme } x = m + x_n \text{ où } m \in \mathbb{Z} \\ x \text{ sinon} \end{cases}$$

□

Exercise 1.2.10. *Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective, telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leq g(n)$$

*Montrer que $f = g$. Difficulté : ***

Proof. Soit par l'absurde n tel que $f(n) < g(n)$. Par surjectivité de g il existe $a_0, a_1, \dots, a_{g(n)} = n$ tels que $\forall i,\ g(a_i) = i$. Par injectivité de f, $Card\{f(a_i)|i = 0, \dots, g(n)\} = g(n) + 1$. Or par hypothèse, $\{f(a_i)|i = 0, \dots, g(n)\} \subset [\![0; g(n) - 1]\!]$ ce qui amène la contradiction. □

Exercise 1.2.11. *Soit E un ensemble et $X \subset E$. La fonction indicatrice de X est définie par*

$$\mathbb{1}_X \longmapsto \begin{cases} E & \to & \{0, 1\} \\ x & \mapsto & 1 \textit{ si } x \in X \\ & & 0 \textit{ sinon} \end{cases}$$

1. *Soit $A, B \subset E$. Exprimer $\mathbb{1}_{A \bigcup B}$, $\mathbb{1}_{A \bigcap B}$, $\mathbb{1}_{A \setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.*
2. *Soit A_1, A_2, …, A_n des sous-ensembles de E. Prouver l'égalité suivante*

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \ldots \mathbb{1}_{A_{i_k}}$$

Proof.
1. $\mathbb{1}_{A \bigcap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A (1 - \mathbb{1}_B)$ et enfin $\mathbb{1}_{A \bigcup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
2. On prouve le résultat par récurrence, l'initialisation ayant été faite à la question précédente. On applique l'hypothèse de récurrence avec $A_n \bigcup A_{n+1}$ au lieu de A_n.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}} \\
&= \mathbb{1}_{A_n \bigcup A_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n-1} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \ldots \mathbb{1}_{A_{i_k}} - \mathbb{1}_{A_{i_1}} \ldots \mathbb{1}_{A_{i_k}} \mathbb{1}_{A_n \bigcup A_{n+1}} \\
&= \mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{A_{n+1}} - \mathbb{1}_{A_n} \mathbb{1}_{A_{n+1}} \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n-1} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \ldots \mathbb{1}_{A_{i_k}} - \mathbb{1}_{A_{i_1}} \ldots \mathbb{1}_{A_{i_k}} (\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{A_{n+1}} - \mathbb{1}_{A_n} \mathbb{1}_{A_{n+1}}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n+1} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \ldots \mathbb{1}_{A_{i_k}}
\end{aligned}$$

□

Exercise 1.2.12. *Trouver une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^n$ sont en bijection. Montrer que l'ensemble des suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang est en bijection avec $\mathbb{N}$. Difficulté : ***

Proof. $(n,p) \longrightarrow (2n+1)2^p - 1$. Le second résultat se montre par récurrence et en utilisant le cas $n = 2$. On note alors ϕ_n des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{S}^n$ où $\mathbb{S}^n$ désigne l'ensemble des suites d'entiers nulles à partir du rang $n+1$ exactement. On utilise alors un procédé diagonal : Si on note ϕ_2' et ϕ_2'' les deux premières composantes de ϕ_2, alors $n \longrightarrow \phi_{\phi_2'(n)}(\phi_2''(n))$ convient. $\square$

Exercise 1.2.13. *Existence d'un point fixe pour une fonction $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ croissante. Indication : considérer le plus grand A vérifiant $A \subset f(A)$.*

Proof. Soit $(A_i)_{i \in I}$ l'ensemble des parties de E vérifiant $A_i \subset f(A_i)$. Soit $A = \cup_{i \in I} A_i$. Alors $f(A) = \cup f(A_i)$ donc $A \subset f(A)$. Par croissance de f, $f(A) \subset f(f(A))$ donc par maximalité de A, $f(A) \subset A$. Bref $A = f(A)$. $\square$

Exercise 1.2.14. *Soit E un ensemble. Montrer que E est infini ssi toute fonction f de E dans lui-même admet une partie stable non triviale.*

Proof. Si E est fini, considérer f un cycle de support E. Si E est infini, considérons $f : E \to E$, et choisissons $x \in E$ quelconque. Soit $A = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} f^{\circ n}(x)$. De toute évidence A est stable par f. Si A est fini, $A \neq E$ et A convient. Sinon, A n'est pas cyclique et en particulier $x \notin \underset{n \geq 1}{\cup} f^{\circ n}(x) = B$. B est stable et convient. $\square$

Exercise 1.2.15. *On dit que $f, g : X \to Y$ possèdent un coégalisateur $e : Y \to Q$ lorsque*

i) $e \circ f = e \circ g$

ii) *pour toute fonction $d : Y \to Q'$ telle que $d \circ f = d \circ g$, il existe une unique fonction $h : Q \to Q'$ vérifiant $h \circ e = d$.*

Montrer que si e existe, alors e est surjective. Indication : montrer que ϕ est surjective si et seulement si pour toute paire de fonction h_1, h_2, $h_1 \circ \phi = h_2 \circ \phi \Rightarrow h_1 = h_2$
Montrer qu'il existe toujours un coégalisateur.

Proof. La première question se fait avec l'indication et en utilisant ii). Pour la deuxième question, on considère la relation binaire $\mathscr{R}$ sur Y définie par

$$y_1 \mathscr{R} y_2 \Leftrightarrow \exists x \in X, \begin{cases} y_1 = f(x) \\ y_2 = g(x) \end{cases}$$

et on s'intéresse aux classes d'équivalences de $\overset{*}{\mathscr{R}}$ la clôture réflexive symétrique transitive de $\mathscr{R}$. Définissons $e : \begin{cases} Y \to Y/\overset{*}{\mathscr{R}} \\ y \longmapsto \bar{y} \end{cases}$. On montre que e est un coégalisateur. Le seul point délicat est de montrer que d est nécessairement constante sur les classes d'équivalence. Faire un dessin. $\square$

Exercise 1.2.16. *Montrer qu'on ne peut pas surjecter un ensemble sur ses parties. Indication : considérer $P = \{x \mid x \notin f(x)\}$*

Proof. P a un antécédent par f, soit y. Si $y \in P$, $y \notin f(y) = P$. Si $y \notin P$, $y \in P$. Bref, absurde. $\square$

Exercise 1.2.17 (théorème de Bernstein)**.** *Soit A, B des ensembles tels qu'il existe $f : A \to B$ injective, $g : B \to A$ injective. On veut montrer que A et B sont en bijection.*

1. *Montrer qu'il suffit de trouver une bijection entre A et $g(B)$.*
2. *Soit $A_0 = A \setminus g(B)$. On définit $A_{n+1} = (g \circ f)(A_n)$. Montrer qu'il suffit de trouver une bijection entre $X = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n$ et $Y = \underset{n\geq 1}{\cup} A_n$.*
3. *Conclure*

Proof.

1. B et $g(B)$ sont en bijection par injectivité de g.
2. Considérons $\sigma : X \to Y$ qu'on prolonge en $\tilde{\sigma}$ sur A par l'identité. $\tilde{\sigma}$ est injective, et bijective dans $(A \setminus X) \cup Y$. Remarquons que pour tout $n \geq 1$, $A_n \subset g(B)$. Ainsi $A_0 \cup Y = \emptyset$. Dès lors, $(A \setminus X) \cap Y = A \setminus A_0 = g(B)$. Il suit que $\tilde{\sigma}$ est une bijection de A vers $g(B)$, ce qui conclut avec la première question.
3. $\phi = g \circ f$ consititue une bijection de X vers Y.

$\square$

1.3 Binary relation

Exercise 1.3.1.

1. *Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(\sum x_i y_i)^2 \leq (\sum x_i^2)(\sum y_i^2)$.*
2. *Soit E un ensemble de cardinal n, $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E ayant k classes d'équivalence et $G = (x, y) \in E^2 \mid x\mathscr{R}y$ le graphe d'équivalence de $\mathscr{R}$ supposé de cardinal p. Montrer que $n^2 \leq kp$.*

Proof.

1.

$$\begin{aligned}
(\sum x_i y_i)^2 &= \sum x_i^2 y_i^2 + 2\sum_{i<j}(x_i y_i)(x_j y_j) \\
(\sum x_i^2)(\sum y_i^2) &= \sum x_i^2 y_i^2 + \sum_{i<j} x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 \\
&= (\sum x_i y_i)^2 + \sum_{i<j} x_i^2 y_j^2 - 2(x_i y_i x_j y_j) + x_j^2 y_i^2 \\
&= (\sum x_i y_i)^2 + \sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \\
&\geq (\sum x_i y_i)^2
\end{aligned}$$

2. On a $n = |c_1| + \ldots + |c_k|$ et $p = |c_1|^2 + \ldots + |c_k|^2$. On applique Cauchy-Schwarz avec $x_i = |c_i|$ et $y_i = 1$.

$\square$

Exercise 1.3.2. *Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit une relation $\mathscr{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par*

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$$

1. *Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Décrire la classe d'équivalence de $X \in \mathcal{P}(E)$.*

Proof.

1. Évident
2. Soit pour $X \subset E$, $\tilde{X} = X \setminus A$. On montre que $\tilde{X}$ est un représentant de la classe d'équivalence pour X, et que $X\mathscr{R}Y$ si et seulement si $\tilde{X} = \tilde{Y}$. Dès lors

$$\bar{X} = \{(X \setminus A) \cup B \mid B \subset A\}$$

$\square$

Exercise 1.3.3. *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur X. Montrer qu'il existe une unique relation d'équivalence $\overset{*}{\mathscr{R}}$ vérifiant*

i) $x\mathscr{R}y \Rightarrow x\overset{*}{\mathscr{R}}y$

ii) si une relation d'équivalence $\sim$ vérife i), alors les classes d'équivalence de $\sim$ contiennent les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$.

Cette relation d'équivalence s'appelle la clôture réflexive, symétrique, transitive de $\mathscr{R}$.

Exercise 1.3.4. *Soit $\preccurlyeq$ la relation binaire définie sur le demi-plan $E = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}$ par*

$$(a, b) \preccurlyeq (a', b') \Leftrightarrow (a, b) = (a', b') \text{ ou } b \leq a'$$

1. *Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.*
2. *S'agit-il d'une relation d'ordre totale ?*

Proof.

1. On applique la définition.
2. $(1, 2)$ et $(1, 3)$ ne sont pas comparables.

$\square$

Exercise 1.3.5. *Soit G un ensemble fini non vide muni de $*$ une loi associative. Montrer que $(G, *)$ admet un idempotent.*

Proof. Soit $x \in G$, quitte à restreindre à $\{x^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, on peut supposer $*$ commutative. Ensuite, on cherche une intuition avec le cas $|G| = 2$, soit $G = \{x, y\}$. Si x ou y est idempotent c'est fini, sinon $(xy)^2 = x^2y^2 = yx = xy$. Dans le cas général, on crée un graphe avec $V = G$ et $E = \{(x, x^2) \mid x \in G\}$. Il doit contenir un cycle $(x_1, \ldots, x_k)$ et dans ce cas $x_1 * \ldots * x_k$ est idempotent. ☐

Exercise 1.3.6 (Ordre lexicographique)**.** *Sur $E = \mathbb{N}^2$, on définit la relation binaire $\preccurlyeq$ par*

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$$

1. *Vérifier que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.*
2. *S'agit-il d'une relation d'ordre totale ? S'agit-il d'un bon ordre ?*

Proof.

1. Vérifier la définition.
2. Oui et oui. Il suffit de vérifier que toute partie non vide possède un minimum, ce qui est facile en ne considérant que les éléments dont la première coordonnée est minimale.

☐

Exercise 1.3.7 (lemme de Newman)**.** *Soit E un ensemble et $\to$ une relation sur E. On note $\xrightarrow{*}$ la clôture réflexive, transitive de $\to$. On dit que $\to$*

- *est **confluente** si*

$$\forall x, y, z \in E,\ z \xleftarrow{*} x \xrightarrow{*} y \Rightarrow (\exists v \in E,\ y \xrightarrow{*} v \text{ et } z \xrightarrow{*} v)$$

- *est **localement confluente** si*

$$\forall x, y, z \in E,\ z \leftarrow x \rightarrow y \Rightarrow (\exists v \in E,\ y \xrightarrow{*} v \text{ et } z \xrightarrow{*} v)$$

On veut montrer que si $\to$ est bien fondée, alors $\to$ est localement confulente si et seulement si $\to$ est confluente. Soit $P(x)$ la propriété

$$\forall y, z \in E,\ z \xleftarrow{*} x \xrightarrow{*} y \Rightarrow (\exists v \in E,\ y \xrightarrow{*} v \text{ et } z \xrightarrow{*} v)$$

1. *Montrer la propriété en supposant que tous les successeurs de x vérifient P. Indication : utiliser deux fois l'hypothèse d'induction.*
2. *Conclure par l'absurde.*

Exercise 1.3.8 (Ordre alphabétique)**.** *On se donne $\prec$ un ordre strict sur un alphabet $\mathcal{A}$. On définit l'ordre lexicographique sur les mots de $\mathcal{A}$ par*

$$u \leq_{lex} v \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ est préfixe de } v \\ \text{ou} \\ \exists w, s, t \in \mathcal{A}^*,\ a, b \in \mathcal{A},\ a \prec b \text{ et } u = was,\ v = wbt \end{cases}$$

On définit l'ordre militaire sur les mots de $\mathcal{A}$ par

$$u \leq_{mil} v \Leftrightarrow \begin{cases} |u| < |v| \\ ou \\ |u| = |v| \text{ et } u \leq_{lex} v \end{cases}$$

Montrer que l'ordre militaire est bien fondé, mais que l'ordre lexicographique ne l'est pas.

Proof.
L'ordre lexicographique n'est pas bien fondé Il suffit de trouver un contre-exemple. Par exemple, $u_n = a^n b$ est strictement décroissante pour l'odre lexicographique.
L'ordre militaire est bien fondé Supposons par l'absurde qu'on puisse trouver (u_n) une suite strictement décroissante pour l'ordre militaire. Remarquons que la suite $|u_n|$ est une suite d'entiers décroissante, donc constante à partir d'un certain rang, mettons N. Cela fournit donc une suite (v_n) telle que $v_{n+1} <_{lex} v_n$ pour tout n et $|v_n|$ est constante. On va montrer la propriété suivante, par récurrence sur la taille de w_n

Lemme. *Soit w_n une suite de taille constante et décroissante pour $\leq_{lex}$. Alors w_n est stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang)*

Alors v_n constituera une contradiction.
L'initialisation où w_n est juste une lettre est immédiate parce que $\mathcal{A}$ est fini, et donc $\prec$ est un bon ordre. Soit maintenant donc v_n de taille constante $p+1$. Considérons w_n les p premières lettres de v_n, et z_n la dernière lettre, i.e. $v_n = w_n z_n$. Alors w_n et z_n sont décroissantes pour $\leq_{lex}$, donc par hypothèse de récurrence stationnaire, donc v_n l'est également. □

Exercise 1.3.9. *On suppose que la relation "être l'ami de" est réflive et symétrique, et que le nombre de personnes est fini. Montrer qu'il existe deux personnes ayant autant d'amis.*

Proof. Par l'absurde, la fonction nombre d'amis est une bijection avec $[|1, n|]$ où n est le nombre de personnes. En particulier, il existe une personne amie qu'avec elle-même, et une avec tout le monde. Cela entre en contradiction avec la symétrie. □

Exercise 1.3.10. *On suppose que la relation "avoir serré la main" est irréflexive et symétrique, et que l'ensemble des personnes est fini. Montrer que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.*

Proof. On regarde $p = |(x, y) \mid x$ et y se sont serrés la main$|$. Notons Δ la relation "a serré la main de". Par symétrie et irréflexivité, p est pair. En effet, en notant $x_1, \ldots, x_n$ les personnes, on peut écrire

$$\begin{aligned} p &= \sum_{1 \leq i,j \leq n,\ x_i \Delta x_j} 1 \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n,\ i \neq j,\ x_i \Delta x_j} 1 && \text{(irréfléxivité)} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n,\ x_i \Delta x_j} 2 && \text{(symétrie)} \\ &= 0 \mod 2 \end{aligned}$$

Or $p = \sum_i |\{\text{mains serrées par } x_i\}|$. Notons I la partie de $1, \dots, n$ correspondant aux personnes ayant serré un nombre impair de mains, et J son complémentaire. On a

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^{n} |\{y \mid x_i \Delta y\}| \\ &= \sum_{i \in I} 1 + \sum_{i \in J} 0 \mod 2 \\ &= |I| \mod 2 \end{aligned}$$

□

Exercise 1.3.11. *Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admet un plus petit élément et un plus grand élément. Montrer que E est fini.*

Proof. Si E est infini, on peut prendre son plus grand élément, puis le plus grand des restant, etc. ce qui construit une suite infinie stricement décroissante. □

Exercise 1.3.12. *Soit E un ensemble ordonné par une relation $\leq$. On considère un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de E. Comparer*

$$\max_{1 \leq j \leq p} \left(\min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j} \right)$$

et

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left(\max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j} \right)$$

Donner un cas de non égalité.

Proof. Le plus petit des géants est plus grand que le plus grand des nains. □

1.4 Complex numbers

Exercise 1.4.1. *Voir les exercices de Gery Huvent 47, 49, 52, 53, 60, 72, 89 (théorème de Napoléon).*

Exercise 1.4.2. *Résoudre l'équation $z^3 + (i-2)z^2 + (3-3i)z + 2i - 2 = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.*

Proof. Soit x une telle racine réelle. Soit $P(X) = X^3 + (i-2)X^2 + (3-3i)X + 2i - 2$. On a donc $P(x) = \overline{P(x)} = 0$. x étant réel, l'équation précédente amène

$$\begin{aligned} -ix^2 + 3ix - 2i &= ix^2 - 3ix + 2i \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ (x-1)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

On vérifie rapidement que $P(1) = 0$. On obtient ainsi la factorisation $P(X) = (X-1)(X^2 + (i-1)X + 2 - 2i)$ et on trouve les racines restantes par une étude classique des polynômes du second degré. □

Exercise 1.4.3. *Résoudre l'équation $z^n = \overline{z}$.*

Proof. $z = 0$ convient. On étudie maintenant les solutions dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'équation est alors équivalente à $z^{n+1} = |z|^2$.

- si n=1, l'équation est équivalente à $z^2 \in \mathbb{R}^+$ soit $z \in \mathbb{R}$.
- sinon, $|z| = 1$ est nécessaire. On trouve les racines $n+1$-ièmes de l'unité.

□

Exercise 1.4.4. *Soit $u,\ v,\ w \in \mathbb{U}$, tels que $u+v+w=0$. Montrer que $u = jv = j^2 w$ ou bien $u = jw = j^2 v$.*

Proof. Quitte à multiplier par $\overline{u}$ il suffit de montrer que si $v, w \in \mathbb{U}$ vérifient $1+v+w=0$, alors $\{v,w\} = \{j, j^2\}$. En passant à la partie imaginaire dans l'équation précédente, il vient que v et w sont de partie imaginaire opposée et donc de partie réelle de même modèle module. En passant à la partie réelle dans l'équation il vient alors que leur partie réelle commune est $-\frac{1}{2}$. Le résultat souhaité est alors immédiat. □

Exercise 1.4.5. *Soit $N \in \mathbb{N}$. On dit que N est somme de deux carrés s'il existe $a, b \in \mathbb{N},\ a^2+b^2 = N$. Montrer que si N est somme de deux carrés, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, N^p est somme de deux carrés.*

Proof. On montre que l'ensemble des sommes de deux carrés est stable par produit. Cela est immédiat en remarquant que $a^2+b^2 = |a+ib|^2 = z\overline{z}$ avec $z = a+ib$ puis en voyant que $z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}$. □

Exercise 1.4.6. *Soit $P = \{z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.*

1. *Soit $z \in P$. Montrer que $\frac{z-i}{z+i} \in D$.*
2. *Soit $z \neq -i$ tel que $\frac{z-i}{z+i} \in D$. Montrer que $z \in P$.*
3. *Montrer que l'application*

$$\phi \longmapsto \begin{cases} P & \to & D \\ z & \mapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{cases}$$

   est une bijection et calculer sa réciproque.

Proof.

1. Le résultat est immédiat après écriture de $z = a+ib$ car $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{a^2+(b-1)^2}{a^2+(b+1)^2}$.
2. $a^2+(b-1)^2 < a^2+(b+1)^2 \leftrightarrow b > 0$.
3. $u = \frac{z-i}{z+i}$ et $u \neq 1$ et $z \neq -i \leftrightarrow z = i\frac{1+u}{1-u}$

□

Exercise 1.4.7. *Inspiré du 3.20 du poly de Mansuy. Trouver le plus grand α tel que*

$$\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\},\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |z^n - 1| \geq \alpha$$

*Indication : On pourra séparer les cas où z est une racine de l'unité. Difficulté : ****

Proof. Avec $z = j$, on a la majoration $\alpha \leq \sqrt{3}$. On montre que $\sqrt{3}$ convient. Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, et $\theta \in]0;1[$ tel que $2\pi\theta$ soit son argument.

- si θ est irrationnel, on peut montrer que $\{z^n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\theta_n \in]0;1[$ tel que $2\pi\theta$ soit l'argument de z^n. Regardons $\gamma = \inf_{n\in\mathbb{N}} \theta_n$.
  Supposons $\gamma > 0$. Soit $n > m \in \mathbb{N}$ tels que $\theta_n < 2\gamma$, $\theta_m < 2\gamma$. Si $\theta_n > \theta_m$, alors $\theta_{n-m} = \theta_n - \theta_m < \gamma$ ce qui est impossible. Ainsi $0 < 1 - \theta_{n-m} < \gamma$. Soit $N = \lfloor \frac{1}{1-\theta_{n-m}} \rfloor$. Il vient en passant deux fois au conjugué $0 < \theta_{N(n-m)} < \alpha$ ce qui est une contradiction.
  Ainsi $\gamma = 0$ et de là $\{z^n, n \in \mathbb{N}\}$ est soit fini (inf atteint), soit dense dans $\mathbb{U}$ (inf non atteint). Par irrationnalité de θ l'ensemble est dense. En particulier $\sup_{n\in\mathbb{N}} |z^n - 1| = 2$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|z^n - 1| \geq \sqrt{3}$

- sinon, z est une racine de l'unité et est donc générateur de $\mathbb{U}_m$ avec $m \geq 2$ car $z \neq 1$. Avec l'étude précédente de j, il suffit de vérifier que

  $$\forall n \geq 2,\ \min\{\mathcal{R}e(z), z \in \mathbb{U}_n\} \leq -\frac{1}{2}$$

  Ce résultat est vrai pour $n = 2$, et tient nécessairement pour $n \geq 3$ pour assurer $\frac{2\pi}{n} \leq \frac{2\pi}{3}$ où $\frac{2\pi}{3}$ est l'ouverture angulaire de la zone $\{\mathcal{R}e(z) \leq -\frac{1}{2}, z \in \mathbb{U}\}$.

□

Exercise 1.4.8. *Soit $z_1, \ldots, z_n$ des complexes de modules inférieurs ou égaux à 1. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $|\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_n z_n| \leq \sqrt{2}$.*

Proof. On raisonne par récurrence. Lorsque $n = 2$, on écrit

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| \times |z_1 + z_2| &= |z_1^2 - z_2^2| \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Pour $n = 3$, les complexes $\pm z_1, \pm z_2, \pm z_3$ forment les sommets d'un hexagone (non croisé quitte à permuter les z_i). Un des angles au centre est donc inférieur à $\frac{\pi}{3}$. Le demi-côté correspondant est donc de longueure inférieure à $\sin(\pi/6) = 1/2$ ce qui fournit z_i, ε_j, z_j tels que $|z_i + \varepsilon_j z_j| \leq 1$. Cela permet de faire la récurrence. □

Exercise 1.4.9. *Soit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Montrer que*

$$\frac{|\sum_{k=1}^n z_k|}{1 + |\sum_{k=1}^n z_k|} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}$$

Proof. Croissance de $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ et récurrence. □

Exercise 1.4.10. *Soit $u, v \in \mathbb{C}$ et $z = u + iv$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $|z|^2 = u^2 + v^2$.*

Proof. L'identité suivante est toujours vérifiée

$$(u + iv)(u - iv) = u^2 + v^2$$

La conditon se réécrit donc

$$(u+iv)(u-iv) = (u+iv)(\bar{u}-i\bar{v})$$

Si $z \neq 0$, cela implique $(u-\bar{u}) = i(v-\bar{v})$. Or le terme de gauche est un réel, et le terme de droite un imaginaire pure. Cela amène ainsi $u, v \in \mathbb{R}$. Bref la condition recherchée est $z = 0$ ou $u, v \in \mathbb{R}$. $\square$

Exercise 1.4.11. *Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}(1+w^k)^n$ où w est une racine primitive n-ième de l'unité.*

Proof. On écrit pour $w \neq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(1+w^k)^n &= 2^n + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}w^{kl} \\
&= 2^n + 2n - 2 + \sum_{l=1}^{n-1}\binom{n}{l}\frac{w^l - w^{nl}}{1-w^l} \\
&= 2^n + 2n - \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} \\
&= 2n
\end{aligned}$$

$\square$

Exercise 1.4.12. *Voir les exercices de Gery Huvent 47, 49, 52, 53, 60, 72, 89 (théorème de Napoléon).*

Exercise 1.4.13. *Résoudre l'équation $z^3 + (i-2)z^2 + (3-3i)z + 2i - 2 = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.*

Proof. Soit x une telle racine réelle. Soit $P(X) = X^3 + (i-2)X^2 + (3-3i)X + 2i - 2$. On a donc $P(x) = \overline{P(x)} = 0$. x étant réel, l'équation précédente amène

$$\begin{aligned}
-ix^2 + 3ix - 2i &= ix^2 - 3ix + 2i \\
x^2 - 3x + 2 &= 0 \\
(x-1)(x-2) &= 0
\end{aligned}$$

On vérifie rapidement que $P(1) = 0$. On obtient ainsi la factorisation $P(X) = (X-1)(X^2 + (i-1)X + 2 - 2i)$ et on trouve les racines restantes par une étude classique des polynômes du second degré. $\square$

Exercise 1.4.14. *Résoudre l'équation $z^n = \overline{z}$.*

Proof. $z = 0$ convient. On étudie maintenant les solutions dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'équation est alors équivalente à $z^{n+1} = |z|^2$.

- si n=1, l'équation est équivalente à $z^2 \in \mathbb{R}^+$ soit $z \in \mathbb{R}$.
- sinon, $|z| = 1$ est nécessaire. On trouve les racines $n+1$-ièmes de l'unité.

$\square$

Exercise 1.4.15. *Soit u, v, $w \in \mathbb{U}$, tels que $u+v+w=0$. Montrer que $u = jv = j^2 w$ ou bien $u = jw = j^2 v$.*

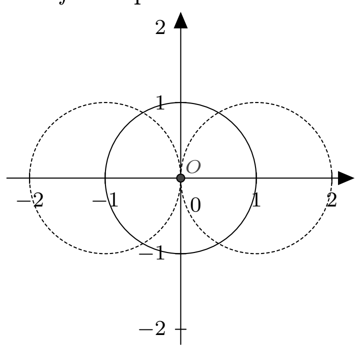
Proof. Quitte à multiplier par $\overline{u}$ il suffit de montrer que si $v, w \in \mathbb{U}$ vérifient $1+v+w=0$, alors $\{v,w\} = \{j, j^2\}$. En passant à la partie imaginaire dans l'équation précédente, il vient que v et w sont de partie imaginaire opposée et donc de partie réelle de même modèle module. En passant à la partie réelle dans l'équation il vient alors que leur partie réelle commune est $-\frac{1}{2}$. Le résultat souhaité est alors immédiat. □

Exercise 1.4.16. *Soit $N \in \mathbb{N}$. On dit que N est somme de deux carrés s'il existe $a, b \in \mathbb{N}$, $a^2+b^2 = N$. Montrer que si N est somme de deux carrés, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, N^p est somme de deux carrés.*

Proof. On montre que l'ensemble des sommes de deux carrés est stable par produit. Cela est immédiat en remarquant que $a^2+b^2 = |a+ib|^2 = z\overline{z}$ avec $z = a+ib$ puis en voyant que $z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}$. □

Exercise 1.4.17. *Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $|1-z| < 1$. Montrer que $|1+z^2| \geq 1$.*

Proof. On peut écrire $z = e^{i\theta}$ avec $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$. Alors $2\theta \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ d'où le résultat.



□

Exercise 1.4.18. *Soit $P = \{z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.*

1. *Soit $z \in P$. Montrer que $\frac{z-i}{z+i} \in D$.*
2. *Soit $z \neq -i$ tel que $\frac{z-i}{z+i} \in D$. Montrer que $z \in P$.*
3. *Montrer que l'application*

$$\phi \longmapsto \begin{cases} P & \to & D \\ z & \mapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{cases}$$

est une bijection et calculer sa réciproque.

Proof. 1. Le résultat est immédiat après écriture de $z = a+ib$ car $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{a^2+(b-1)^2}{a^2+(b+1)^2}$.

2. $a^2+(b-1)^2 < a^2+(b+1)^2 \leftrightarrow b > 0$.

3. $u = \frac{z-i}{z+i}$ et $u \neq 1$ et $z \neq -i \leftrightarrow z = i\frac{1+u}{1-u}$

□

Exercise 1.4.19. *Inspiré du 3.20 du poly de Mansuy. Trouver le plus grand α tel que*

$$\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\},\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |z^n - 1| \geq \alpha$$

*Indication : On pourra séparer les cas où z est une racine de l'unité. Difficulté : ****

Proof. Avec $z = j$, on a la majoration $\alpha \leq \sqrt{3}$. On montre que $\sqrt{3}$ convient. Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, et $\theta \in]0;1[$ tel que $2\pi\theta$ soit son argument.

- si θ est irrationnel, on peut montrer que $\{z^n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\theta_n \in]0;1[$ tel que $2\pi\theta$ soit l'argument de z^n. Regardons $\gamma = \inf_{n\in\mathbb{N}} \theta_n$.
  Supposons $\gamma > 0$. Soit $n > m \in \mathbb{N}$ tels que $\theta_n < 2\gamma$, $\theta_m < 2\gamma$. Si $\theta_n > \theta_m$, alors $\theta_{n-m} = \theta_n - \theta_m < \gamma$ ce qui est impossible. Ainsi $0 < 1 - \theta_{n-m} < \gamma$. Soit $N = \lfloor \frac{1}{1-\theta_{n-m}} \rfloor$. Il vient en passant deux fois au conjugué $0 < \theta_{N(n-m)} < \alpha$ ce qui est une contradiction.
  Ainsi $\gamma = 0$ et de là $\{z^n, n \in \mathbb{N}\}$ est soit fini (inf atteint), soit dense dans $\mathbb{U}$ (inf non atteint). Par irrationnalité de θ l'ensemble est dense. En particulier $\sup_{n\in\mathbb{N}} |z^n - 1| = 2$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|z^n - 1| \geq \sqrt{3}$

- sinon, z est une racine de l'unité et est donc générateur de $\mathbb{U}_m$ avec $m \geq 2$ car $z \neq 1$. Avec l'étude précédente de j, il suffit de vérifier que

  $$\forall n \geq 2,\ \min\{\mathcal{R}e(z), z \in \mathbb{U}_n\} \leq -\frac{1}{2}$$

  Ce résultat est vrai pour $n = 2$, et tient nécessairement pour $n \geq 3$ pour assurer $\frac{2\pi}{n} \leq \frac{2\pi}{3}$ où $\frac{2\pi}{3}$ est l'ouverture angulaire de la zone $\{\mathcal{R}e(z) \leq -\frac{1}{2}, z \in \mathbb{U}\}$.

□

Exercise 1.4.20. *Soit $z_1, \ldots, z_n$ des complexes de modules inférieurs ou égaux à 1. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $|\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_n z_n| \leq \sqrt{2}$.*

Proof. On raisonne par récurrence. Lorsque $n = 2$, on écrit

$$\begin{aligned}|z_1 - z_2| \times |z_1 + z_2| &= |z_1^2 - z_2^2| \\ &\leq 2\end{aligned}$$

Pour $n = 3$, les complexes $\pm z_1, \pm z_2, \pm z_3$ forment les sommets d'un hexagone (non croisé quitte à permuter les z_i). Un des angles au centre est donc inférieur à $\frac{\pi}{3}$. Le demi-côté correspondant est donc de longueure inférieure à $\sin(\pi/6) = 1/2$ ce qui fournit z_i, ε_j, z_j tels que $|z_i + \varepsilon_j z_j| \leq 1$. Cela permet de faire la récurrence. □

Exercise 1.4.21. *Soit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Montrer que*

$$\frac{|\sum_{k=1}^n z_k|}{1 + |\sum_{k=1}^n z_k|} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}$$

Proof. Croissance de $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ et récurrence. □

Exercise 1.4.22. *Soit $u, v \in \mathbb{C}$ et $z = u + iv$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $|z|^2 = u^2 + v^2$.*

Proof. L'identité suivante est toujours vérifiée

$$(u+iv)(u-iv) = u^2+v^2$$

La conditon se réécrit donc

$$(u+iv)(u-iv) = (u+iv)(\bar{u}-i\bar{v})$$

Si $z \neq 0$, cela implique $(u-\bar{u}) = i(v-\bar{v})$. Or le terme de gauche est un réel, et le terme de droite un imaginaire pure. Cela amène ainsi $u, v \in \mathbb{R}$. Bref la condition recherchée est $z = 0$ ou $u, v \in \mathbb{R}$. □

Exercise 1.4.23. *Calculer* $\sum_{k=0}^{n-1}(1+w^k)^n$ *où* w *est une racine primitive* n*-ième de l'unité.*

Proof. On écrit pour $w \neq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(1+w^k)^n &= 2^n + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}w^{kl} \\
&= 2^n + 2n - 2 + \sum_{l=1}^{n-1}\binom{n}{l}\frac{w^l - w^{nl}}{1-w^l} \\
&= 2^n + 2n - \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} \\
&= 2n
\end{aligned}$$

□

1.5 Algebraic handling

Exercise 1.5.1. *Calculer par télescopage* $S = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$.

Proof.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \text{ (télescopage)}
\end{aligned}$$

□

Exercise 1.5.2. *Calculer par télescopage* $S = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

Proof.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} \\
&= \sqrt{n+1} \text{ (télescopage)}
\end{aligned}$$

□

Exercise 1.5.3. *Première somme. Calculer* $S_1 = \sum_{k=0, k\equiv 0[3]}^{n} \binom{n}{k}$.

Proof. On note

$$S_1 = \sum_{k=0,k\equiv 0[3]}^{n} \binom{n}{k}$$
$$S_2 = \sum_{k=0,k\equiv 1[3]}^{n} \binom{n}{k} j$$
$$S_3 = \sum_{k=0,k\equiv 2[3]}^{n} \binom{n}{k} j^2$$

On a alors

$$S_1 + S_2 + S_3 = (1+j)^n = -j^{2n}$$
$$S_1 + jS_2 + j^2 S_3 = (1+j^2)^n = -j^n$$
$$S_1 + j^2 S_2 + jS_3 = 2^n$$

D'où en sommant les trois égalités $S_1 = \frac{1}{3}(2^n - j^n - j^{2n})$. □

Exercise 1.5.4. *deuxième somme. Calculer* $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k}(-1)^k$.

Proof. On note

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k}(-1)^k$$
$$S_2 = i\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k+1}(-1)^k$$

On a alors

$$S_1 + S_2 = (1+i)^n$$
$$S_1 - S_2 = (1-i)^n$$

D'où en sommant les deux égalités $S_1 = \frac{1}{2}((1-i)^n + (1+i)^n)$. □

Exercise 1.5.5. *troisième somme. Calculer* $S_1(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} t^{2k+1}$.

Proof. On note

$$S_1(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} t^{2k+1}$$
$$S_2(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} t^{2k}$$

On a alors

$$S_1(t) + S_2(t) = (1+t)^{2n+1}$$
$$S_2(t) - S_1(t) = (1-t)^{2n+1}$$

D'où en sommant les deux égalités $S_1(t) = \frac{1}{2}((1+t)^{2n+1} - (1-t)^{2n+1})$. □

Exercise 1.5.6. *Soit $x_1, \ldots, x_p$ des entiers tels que pour tout k, $0 \leq x_k \leq k$ et $x_p \neq 0$. La suite finnie $(x_1, \ldots, x_p)$ s'appelle l'écriture factorielle de l'entier $n = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k k!$. Montrer que cette écriture existe et est unique pour tout entier naturel n.*

Proof. On montre l'unicité en premier lieu. Pour cela on se donne par l'absurde $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p$ tels que $y_p - x_p \geq 1$ et $\sum\limits_{k=1}^{p} (y_k - x_k)k! = 0$. De là $p! \leq \sum\limits_{k=1}^{p-1} k \times k! < p!$, la dernière inégalité étant immédiate par récurrence. Cela fournit la contradiction et prouve l'unicité de la décomposition. Il suffit alors de remarquer que $[\![0, p!-1]\!]$ et $\{(x_1, \ldots, x_{p-1}),\ 0 \leq x_k \leq k\}$ ont même cardinal pour conclure. □

Exercise 1.5.7. *Calculer pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la somme $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.*

Proof. L'astuce consiste à considérer la deuxième somme $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i \sin(k\theta)$. On a alors $S_1 = \mathfrak{Re}(S_1 + S_2) = \mathfrak{Re}((1 + ei\theta)^n)$. □

Exercise 1.5.8. *Simplifier $(1 - 2z + z^2) \sum\limits_{k=1}^{n} kz^k$.*

Proof. On regarde le polynôme $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} X^k = \frac{X^{n+1}-1}{X-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ de dérivée $Q'(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} kX^{k-1} = \frac{nX^{n+1}-(n+1)X^n+1}{(X-1)^2}$. Ainsi le polynôme de l'énoncé et $nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X$ coïncident sur un ensemble infini donc sur $\mathbb{C}$. □

Exercise 1.5.9. *Soit E un ensemble de cardinal n. Calculer $S = \sum\limits_{A,B \subset E} |A \bigcap B|$.*

Proof.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{A,B \subset E} \sum_{x \in E} \mathbb{1}_{x \in A \bigcap B} \\ &= \sum_{x \in E} \sum_{A,B \subset E} \mathbb{1}_{x \in A \bigcap B} \\ &= \sum_{x \in E} |\{A, B \in E \setminus \{x\}\}| \\ &= \sum_{x \in E} 4^{n-1} \\ &= n4^{n-1} \end{aligned}$$

□

Exercise 1.5.10. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum\limits_{k=0, k \equiv 0[p]}^{n} \binom{n}{k}$*

1.6 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$

Exercise 1.6.1. *Montrer qu'une union dénombrable d'ensemble dénombrable est dénombrable.*

Exercise 1.6.2. *Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Montrer que l'ensemble des n tels que $\sigma(n) \geq n$ est infini.*

Proof. On va montrer que l'ensemble des $\{\sigma \mid \exists n \sigma = \sigma(n) \text{ and } \sigma(n) \geq n\}$ n'est pas majoré, cela conclura par bijectivité de σ. Soit $N \in \mathbb{N}$, et considérons l'ensemble $\sigma([\![1, N]\!]$.

- Si $\sigma([\![1, N]\!] = [\![1, N]\!]$ alors $\sigma(N+1) \geq N+1$.
- Sinon $\exists k \leq N$ tel que $\sigma(k) > N$ i.e. $\sigma(k) \geq N+1$.

□

Exercise 1.6.3. *Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $(\frac{\sigma(n)}{n})$ converge. Que dire de la limite ? Trouver un exemple où $(\frac{\sigma(n)}{n})$ ne converge pas.*

Proof. On va montrer que la limite est 1. Soit l la limite

1. Si $l < 1$, soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe N tel que $\forall n \geq N$, $\frac{\sigma(n)}{n} < 1 - \varepsilon$. Soit $M = \max \sigma(1), \ldots, \sigma(N)$, et $K(M) = \lfloor \frac{M}{1-\varepsilon} \rfloor$. Quitte à prendre M encore plus grand, $K \geq M+1$.

□

Exercise 1.6.4.

1. *Trouver une injection de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.*
2. *Trouver une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vers $\mathbb{R}$.*

Proof. 1. On définit l'image de x par ϕ de la manière suivante : si le développement de x est $x = 0, a_1 a_2 \ldots$ on pose

$$\phi(x) = \{1 a_{\frac{n(n+1)}{2}} \ldots a_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Meilleure solution : prendre la réciproque de la question 2, en binaire.

2. On définit l'image de $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par ψ de la manière suivante:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{n \in A} 10^{-n}$$

□

Exercise 1.6.5.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $[\![0, 9]\!]$ non tous égaux à 9. On note x le réel dont le développement décimal est $0, a_1 \ldots a_n a_1 \ldots a_n a_1 \ldots a_n \ldots$. Justifier l'existence et trouver $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{p}{q}$.*
2. *Réciproquement, montrer que si x est rationnel, alors son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. Indication : on admettra que si u et v sont premiers entre eux, alors il existe n tels que $u^n = 1 \mod v$.*

Proof.

1. On note

$$a = \sum_{m=1}^{n} a_m 10^{n-m}$$

. Alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{+\infty} a 10^{-nk} \\ &= a \frac{10^{-n}}{1 - 10^{-n}} \\ &= \frac{a}{10^n - 1} \end{aligned}$$

2. Soit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. Écrivons $q = 2^\alpha 5^\beta q'$ avec $q' \wedge 2 = q' \wedge 5 = 1$. Quitte à multiplier le numérateur par une puissance appropriée de 2 ou de 5, on se restreint à l'étude de la forme suivante $x = 10^{-m} \frac{p'}{q'}$ où $p' \wedge q' = 1$ et $q' \wedge 10 = 1$.
Ensuite 10 est inversible dans $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}, *)$ ce qui fournit n tel que $10^n = 1 \mod q'$. En effet il existe $i < j$ tels que $10^i = 10^j \mod q'$ et on multiplie par 10^{-i}. Finalement on peut écrire

$$x = 10^{-m} \frac{p''}{10^n - 1}$$

dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

$\square$

Exercise 1.6.6. *Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit $(a_n)_{n\in N}$ la suite telle que a_n est le chiffre des unités du coefficient binomial $\binom{n}{k}$. On note x le réel défini par la donné de son développement décimal propre*

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier q tel que*

$$\binom{n + 10k!}{k} = \binom{n}{k} + 10q$$

2. *En déduire que $x \in \mathbb{Q}$*

Exercise 1.6.7. *Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Déterminer $\sup\limits_{x,y\in A} |x - y|$.*

Proof. $\sup\limits_{x,y\in A} |x - y| \leq \sup A - \inf A$ par définition. Soit $\varepsilon > 0$, et $x, y \in A$ tels que $\sup A < x + \varepsilon$ et $\inf A > y - \varepsilon$. Alors $\sup\limits_{x,y\in A} |x - y| \geq \sup A - \inf A + 2\varepsilon$. $\square$

Exercise 1.6.8. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $xE(x) = x^2 - E(x)^2$ où $E(\cdot)$ désigne la fonction partie entière.*

Proof. Posons $n = E(x)$ et $\alpha = x - E(x) \in [0, 1]$. On doit résoudre

$$n(n + \alpha) = n^2 + 2n\alpha + \alpha^2 - n^2$$

soit

$$\alpha^2 + n\alpha - n^2 = 0$$

Si $\alpha = 0$, cela impose $n = 0$ et on vérifie que $x = 0$ convient. Sinon $\alpha = \frac{n(\sqrt{5}-1)}{2}$. Or $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$, nécessairement $n = 1$ et $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ convient. $\square$

Exercise 1.6.9. *Soit $G \subset \mathbb{R}$ sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour l'addition. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$ ou bien G est isomorphe à $a\mathbb{Z}$ pour un certain a à expliciter.*

Proof. On note $G^+ = G \cap \mathbb{R}_+^*$. Considérons $a = \inf G^+$.

Si $a > 0$ S'il existe $x, y \in G^+$ tels que $a \leq x < y < 2a$, alors $y - x \in G$ (car G est un groupe) et $y - x > 0$ donc $y - x \in G^+$. Mais $y - x < a$, c'est impossible. Ainsi a est atteint, i.e. $a \in G^+$. Puis, comme G est un groupe, $a\mathbb{Z} \subset G$. On va montrer qu'en fait $a\mathbb{Z} = G$. Supposons donc par l'absurde qu'il existe $g \in G$, $g \notin a\mathbb{Z}$ c'est-à-dire qu'on peut trouver $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ka < g < (k + 1)a$. Alors $\gamma = (k + 1)a - g \in G$ et $\gamma > 0$ donc $\gamma \in G^+$ et $\gamma < a$. C'est une contradiction.

Si $a = 0$ On va montrer que G^+ est dense dans $\mathbb{R}_+$. Soit alors $x \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon > 0$. D'abord a n'est pas atteint donc on peut trouver $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$. Prenons $n \in \mathbb{N}$ tel que $ng \leq x < (n+1)g$ (i.e. $n = \lfloor \frac{x}{g} \rfloor$). Alors $ng \in G$ et $|x - ng| < \varepsilon$. Cela conclut pour la densité de G^+ dans $\mathbb{R}_+$. Ensuite tout simplement $-G_+ \subset G$ et $-G_+$ est dense dans $\mathbb{R}_-$. Finalement, G est dense dans $\mathbb{R}$. ☐

Exercise 1.6.10. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Déterminer* $\sup\{\alpha x | x \in A\}$ *en fonction de α.*

Proof. Si $\alpha > 0$, il s'agit de $\alpha \sup A$, si $\alpha = 0$ c'est évident et si $\alpha < 0$, il s'agit de $\alpha \inf A$. ☐

Exercise 1.6.11. *Déterminer le sup et l'inf de l'ensemble suivant*

$$A = \{\frac{mn}{(m+n)^2} \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Proof. Commençons par noter que pour tout m, n, $\frac{mn}{(m+n)^2} > 0$ donc $\inf A \geq 0$. Puis par exemple $\underset{n \to +\infty}{\frac{1 \cdot n}{(1+n)^2}} = 0$ donc $\inf A \leq 0$, et finalement $\inf A = 0$.
Ensuite on écrit pour $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{1}{\frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2}$$

La fonction $x + \frac{1}{x}$ est minorée par 2 sur $\mathbb{R}+$, il suit que pour tout m, n, $\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$, et cette borne est atteinte pour $m, n = 1$. Il suit $\sup A = \frac{1}{4}$. ☐

Exercise 1.6.12. *Soit a, b, c des réels de $[0, 1]$. Montrer qu'au moins une des quantités suivantes est plus petite que $\frac{1}{4}$: $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$.*

Proof. $a(1-b)b(1-c)c(1-a) = a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{4^3}$ d'où la conclusion. ☐

Exercise 1.6.13. *Déterminer*

$$\inf\{(x_1 + \ldots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*\}$$

Proof. Notons $A_n = \{(x_1 + \ldots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*\}$.
Avec Cauchy-Schwarz, on a immédiatement que $\inf(A_n) \geq n^2$ et le cas $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ permet de conclure que $\inf(A_n) = n^2$.
Supposons qu'on ne connaisse pas Cauchy-Schwarz et retrouvons ce résultat par récurrence sur n.

Pour $n = 2$ On développe

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2) \cdot (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}) &= 2 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} \\ &\geq 2 + 2 \quad \text{par étude de la fonction } x \mapsto x + \frac{1}{x}\end{aligned}$$

et avec le cas $x_1 = x_2 = 1$, on trouve $\inf A_2 = 4$. Ce cas nous donne l'idée d'évaluer $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, et on essaye donc de prouver que $\inf A_n = n^2$.

Hérédité On regarde

$$(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1})(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}}) = (x_1 + \ldots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}) + 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_i}$$
$$\geq \inf A_n + 2n + 1 = (n+1)^2$$

□

Exercise 1.6.14.

1. *Montrer pour $n \in \mathbb{N}$ que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$*
2. *Soit $a, b \in \mathbb{N}$ qui ne sont pas des carrés parfaits. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.*

Proof.

1. Le sens retour est évident. Soit n qui n'est pas un carré parfait. Il s'agit de montrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel, supposons par l'absurde qu'il ne l'est pas et on écrit $n = \frac{p^2}{q^2}$, soit $nq^2 = p^2$. Par identification des exposants dans la décomposition en facteur premier des deux termes, tous les exposants de la décomposition de n en facteur premier sont pairs, n est donc un carré parfait, ce qui est une contradiction.
2. On note $x = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $y = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. On a $xy \in \mathbb{Q}$ donc x et y sont soit tous deux rationnels, soit tous deux irrationnels. Mais $x + y \notin \mathbb{Q}$, ils sont donc irrationnels.

□

Exercise 1.6.15. *Un nombre univers est un nombre tel que toute séquence finie de chiffres apparaît dans son développement décimal.*

1. *Exhiber un nombre univers.*
2. *Montrer que l'ensemble des nombres univers est dense dans $\mathbb{R}$.*

À titre informatif, sachez qu'on peut montrer que l'ensemble des nombres univers est indénombrable.

Proof.

1. $\alpha = 0.012345678910111213141516\ldots$
2. Soit $a < b \in \mathbb{R}$. On montre qu'il existe un nombre univers dans $]a, b[$. Soit k tel que $a + 2 \times 10^{-k} < b$. $10^{-k}\lfloor 10^k a \rfloor = 10^{-k-1}\alpha$ convient.

Montrons que l'ensemble des nombres univers est indénombrable. Pour cela, notons $\alpha = 0.a_0b_0a_1b_1a_2\ldots$ où a_n est l'écriture en base 10 de $2n$, et b_n de $2n+1$. Remarquons que $a_ib_i \neq b_ia_i$ pour tout i (par exemple car il n'ont pas la même valeur modulo 2). À $(u_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ on associe $f(u_n) = 0.c_0c_1c_2\ldots$ où

$$\begin{cases} c_i = a_ib_i & \text{si } u_i = 1 \\ c_i = b_ia_i & \text{sinon} \end{cases}$$

Il suffit de remarquer pour conclure que f est une fonction injective de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ vers $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres univers. □

Exercise 1.6.16 (nombre incommensurable)**.**

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$ un irrationnel. On note $D(\cdot)$ la fonction partie fractionnaire. Montrer que $\{D(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.*
2. *On dit que x et y sont incommensurables si leur rapport est irrationnel. Soit x, y incommensurables. Si z est un réel, on note $z \mod y = yD(z/y) \in [0, y[$. Montrer que l'ensemble $\{nx \mod y \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, y[$. En déduire que $\{\cos(n) | n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$. Indication : on admet l'irrationnalité de π*

Proof.

1. Soit $A = \{D(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Commençons par remarquer que par irrationnalité de x, $D(nx) > 0$ pour tout n. Il s'agit donc montrer que la borne inférieure de A est 0.

A n'admet pas de minimum Soit $\delta = D(nx)$. Si δ est rationnel, égal à p/q, alors $D(nqx) = 0$ ce qui est impossible. Ainsi δ est irrationnel. Considérons alors $k = \lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor$. Par irrationalité de δ, $k\delta < 1$ et $(k+1)\delta > 1$. Notons $\eta = 1 - k\delta > 0$. On a $D(nkx) = k\delta$ et $D(n(k+1)x) = 1 + (\delta - \eta) - 1 = \delta - \eta < \delta$. Cela prouve que A n'admet pas de minimum.

L'infinimum de A est 0 Notons $a = \inf A$, et supposons par l'absurde $a > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < a$. Puisque a n'est pas atteint, on peut trouver $n < m$ tels que $a < D(mx) < D(nx) < a + \varepsilon$. On pose $\delta = D(nx) - D(mx) < \varepsilon$

Lemme. *Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Alors*

$$D(ax) + D(bx) = \begin{cases} D((a+b)x) \\ ou \\ 1 + D((a+b)x) \end{cases}$$

Proof. On écrit $ax = n_a + D(ax)$, $bx = n_b + D(bx)$. Il vient $(a+b)x = n_{a+b} + D((a+b)x) = n_a + n_b + D(ax) + D(bx)$. Or $0 < D(ax) + D(bx) < 2$ et de là le résultat. $\square$

D'après le lemme on a donc $D(nx) + D((m-n)x) = 1 + D(mx)$, soit $D((m-n)x) = 1 - \delta$. En particulier, δ est irrationnel. Informellement, ajouter $(m-n)x$ revient à retirer δ de la partie fractionnaire. En considérant les multiples de $(m-n)$, pn peut ainsi atteindre $1-\delta$, $1-2\delta$, $1-3\delta$, etc. On peut retirer δ jusqu'à trouver une partie fractionnaire plus petite que a. Rendons cet argument formel.
Soit $k = \lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor$. Par irrationnalité de x, $k\delta < 1$ et $(k+1)\delta > 1$. Notons $\eta = 1 - k\delta > 0$ et remarquons que $\eta < \delta < \varepsilon < a$. On écrit

$$\begin{aligned} k(m-n)x &= k(\lfloor mx \rfloor - \lfloor nx \rfloor) + k(D(mx) - D(nx)) \\ &= k(\lfloor mx \rfloor - \lfloor nx \rfloor) - k\delta \\ &= k(\lfloor mx \rfloor - \lfloor nx \rfloor) - 1 + \eta \end{aligned}$$

Ainsi $D(k(m-n)x) = \eta < a$, ce qui est impossible !

2. Par la question 1, $\{D(n\frac{x}{y}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$ donc $\{yD(n\frac{x}{y}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,y]$. Ensuite π est irrationnel donc $\frac{1}{2\pi}$ également, donc 1 et 2π sont incommensurables, donc $\{\ n \mod 2\pi\}$ est dense dans $[0,2\pi]$ et cela conclut.

$\square$

Exercise 1.6.17. *Soit $\mathcal{S}$ une famille finie de segment de $\mathbb{R}$, telle que $\forall I, J \in \mathcal{S},\ I \cap J \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcap_{I \in \mathcal{S}} I \neq \emptyset$. Et si la famille est infinie ?*

Proof. On note $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \ldots, I_n = [a_n, b_n]$ les segments de $\mathcal{S}$. Notons $a = \max a_i = a_\gamma$ et $b = \min b_i = b_\delta$. Puisque I_γ et I_δ sont d'intersection non vide, il vient $a \leq b$. On montre alors facilement que $[a,b] \subset \bigcap_{I \in \mathcal{S}} I \neq \emptyset$. Si la famille est infinie, on remplace min et max par inf et sup mais les inégalités subsistent. $\square$

Exercise 1.6.18. *PROOF UNCOMPLETE*
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $A = \{E(n\alpha) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{E(n\beta) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que A et B forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si α et β sont irrationnels et vérifient $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.
Indication : introduire la fonction de densité d'une partie P de $\mathbb{N}$ $d(P) = \lim Card(P \cap [\![1; n]\!])/n$.

Proof. Pour le sens retour, on suppose qu'il existe $k = E(na) = E(mb)$. Alors $k < na, mb < k+1$ (les inégalités étant strictes par irrationnalité). On peut alors écrire

$$\begin{aligned} k &= \frac{k}{a} + \frac{k}{b} \\ &< n + m < \frac{k+1}{a} + \frac{k+1}{b} = k+1 \end{aligned}$$

Ce qui induit une contradiction.
Poiur le sens direct, on remarque que la densité de A est $\frac{1}{a}$, que la densité de B est $\frac{1}{b}$ et que la densité se somme pour l'union disjointe. $\square$

Exercise 1.6.19. *Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipotents. En déduire que $\mathbb{R}^a$ et $\mathbb{R}^b$ sont équipotents, pour $a, b \in \mathbb{N}^*$.*

Proof. $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Il suffit de montrer que $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$. C'est facile. Cela donne

$$f : \begin{cases} \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ (a_1, a_2, \ldots), (b_1, b_2, \ldots) \mapsto (a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots) \end{cases}$$

Ensuite par récurrence $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$. $\square$

Exercise 1.6.20. *Trouver une injection de $\sigma : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $\sigma(x)$ soit infinie pour tout réel x, et telle que $\sigma(x) \cap \sigma(y)$ soit finie pour tout $x \neq y$*

Proof. On cherche tout d'abord $\sigma :]0,1[\to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. À un réel d'écriture binaire $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ on associe $\{\sum a_i 2^i \mid \forall i \in \mathbb{N},\ a_i = 0\}$. On vérifie que σ vérifie les hypothèses voulues. Ensuite il ne reste plus qu'à composer à droite par (par exemple) $1/2(1 + \arctan)$ qui envoie injectivement $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. $\square$

Chapter 2

Real and complex analysis

2.1 Numerical sequences

Exercise 2.1.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ la suite définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2\cos(\alpha)u_{n+1} + u_n = 0$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Proof. Classiquement on regarde le polynôme $P(x) = X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1 = (X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha})$. Il vient $u_n = Ae^{in\alpha} + Be^{-in\alpha}$ où A et B vérifient $A + B = u_0$ et $Ae^{i\alpha} + Be^{-i\alpha} = u_1$ ce qui fournit sans difficulté les valeurs de A et B. $\square$

Exercise 2.1.2. *Soit $(u_n)_n$ une suite définie par $u_0 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = (\prod_{k=0}^{n} u_k) + 2$$

Déterminer l'expression, pour $n \geq 1$, de u_n en fonction de n.

Proof. Soit $n \geq 1$. On réécrit la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n(\prod_{k=0}^{n-1} u_k) + 2 = (u_n - 2)u_n + 2$. On introduit alors $v_n = u_n - 1$ qui vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n^2$. Cela amène $\forall n \geq 1, \ u_n = 2^{2^{n-1}} + 1$. $\square$

Exercise 2.1.3. *Soit $(u_n)_n$ une suite définie par $u_0 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 2u_n + 3^n + 1$$

Déterminer l'expression, pour $n \geq 1$, de u_n en fonction de n.

Proof. La suite $v_n = u_n + 1$ vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = 2v_n + 3^n$. La suite $(3_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence. Ainsi $w_n = v_n - 3^n$ vérifie $w_{n+1} = 2w_n$. On trouve alors facilement une expression de u_n. $\square$

Exercise 2.1.4. *Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, dont les valeurs sont successivement 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ... Donner une expression explicite de u_n en fonction de n.*

Proof. La formule $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ amène que $\forall p \in]\frac{n(n-1)}{2},\ \frac{n(n+1)}{2}],\ u_p = n$. La limite a lieu lorsque $2p = n(n+1)$ soit $n = \frac{-1+\sqrt{1+8p}}{2}$. Ainsi $u_n = \lceil \frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2} \rceil$. □

Exercise 2.1.5. *Soit $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels u_n est pair.*

Proof. On se propose d'établir une relation de récurrence sur u_n. On regarde

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} [\frac{n+1}{k}] - [\frac{n}{k}] = Card\{d, d|n+1\ \}$$

Il s'agit donc de déterminer la parité du nombre de diviseurs de n. On se convainc facilement en associant deux par deux les diviseurs que ce nombre est toujours pairs à moins que n ne soit un carré. Ainsi les n convenables, sachant que 1 ne l'est pas, sont 4, 5, ..., 8, 16, ..., 24, ... Autrement dit, $\mathbb{S} = \{n,\ \exists p \in \mathbb{N},\ (2p)^2 \leq n < (2p+1)^2\}$. □

2.2 Convergence of sequences

Exercise 2.2.1. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles de majorants l et l' respectivement, telles que $u_n + v_n \to l + l'$. Que dire de u_n ?*

Proof. On montre que $u_n \to l$. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\forall n \geq N$, $|l + l' - (u_n + v_n)| < \varepsilon$. l et l' étant des majorants respectifs de u_n et v_n on a $|l - u_n| \leq |l - u_n| + |l' - v_n| = |l + l' - (u_n + v_n)| < \varepsilon$ d'où le résultat souhaité. □

Exercise 2.2.2. *Soit (u_n) une suite réelle convergente vers l. Est-ce que $(\lfloor u_n \rfloor)$ est convergente ? Et si $l \notin \mathbb{Z}$?*

Proof. Un contre-exemple est fourni par $\frac{(-1)^n}{n}$. □

Exercise 2.2.3. *Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites équivalentes de limite $+\infty$. Montrer que*

$$\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$$

Proof. $\ln(u_n) - \ln(v_n) = \ln(\frac{u_n}{v_n}) \longrightarrow 0$. Or $\ln(u_n) \longrightarrow +\infty$. L'équivalence est alors immédiate. □

Exercise 2.2.4. *Étudier par inégalité la convergence de la suite définie par $u_n = n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n^3}$.*

Proof. D'une part $v_n \leq n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3} = 1$ et d'autre part $v_n \geq n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3+n} = \frac{n^2}{1+n^2} \to 1$. Par encadrement, $v_n \to 1$. □

Exercise 2.2.5. *Soit $(u_n)_n$ telle que $u_n \sim \frac{1}{n}$ et*

$$\forall n \geq 1, \;\; u_n \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$$

A-t-on $u_n = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$? Et si on ajoute la condition $u_n \geq \frac{1}{n}$?

Proof. $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln(n)}$ fournit un contre-exemple à la première égalité. En ajoutant l'inégalité supplémentaire, $u_n = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ devient vrai puisque $|u_n - \frac{1}{n^2}| \leq \frac{2}{n^2}$. □

Exercise 2.2.6. *Soit $a > 0$, étudier la convergence de la suite $u_n = (\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}})_n$.*

Proof.

- Si a<1, u_n est stationnaire à 0.
- Si a=1, u_n est constante égale à 1.
- si a>1, on regarde l'inégalité $a \leq u_n \leq (a^n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(a^n+1)}$. Or l'inégalité des accroissements finis s'écrit pour ln sur $[1\;,\;+\infty[$, $\ln(a^n+1) \leq n\ln(a) + 1$. De là vient la convergence du membre de droite vers a, puis par encadrement celle de u_n vers a.

□

Exercise 2.2.7. *Soit $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ et $\beta = 2 - \sqrt{3}$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha^n + \beta^n \in \mathbb{N}$.*
2. *Étudier la convergence de $(\alpha^n - \lfloor \alpha^n \rfloor)_n$.*

Proof.

1. On écrit le binôme de Newton

$$\begin{aligned}\alpha^n + \beta^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \sqrt{3}^k (1 + (-1)^k) \\ &= \sum_{k=0,\text{ k paire}}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k+1} 3^{\frac{k}{2}} \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

2. On a $0 < \beta < 1$ donc $\forall n$, $\lfloor \alpha^n \rfloor = u_n - 1$. Il vient

$$\alpha^n - \lfloor \alpha^n \rfloor = 1 - \beta^n \to 1$$

Cela conclut.

□

Exercise 2.2.8. *Soit $(u_n)_n$ et$(v_n)_n$ deux suites telles que $u_n^2 + v_n^2 + u_n v_n \to 0$. Que dire de u_n et v_n ? Indication : pour faciliter l'exercice, on pourra plutôt demander de montrer que leur limite est 0.*

Proof. $(u_n + v_n)^2 - u_n v_n \longrightarrow 0$ donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $u_n v_n > -\varepsilon$. On peut imposer de plus $\forall n \geq N$, $|u_n^2 + v_n^2 + u_n v_n| < \varepsilon$, ce qui amène $0 \leq u_n^2 + v_n^2 < 2\varepsilon$ (l'inégalité se voit bien par l'absurde). Finalement on trouve que $u_n^2 + v_n^2 \longrightarrow 0$ ce qui conduit au résultat souhaité. □

Exercise 2.2.9. *1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution positive que l'on notera x_n.*

2. Déterminer deux termes du développement asymptotique de x_n.

Proof. 1. On étudie la fonction $f_n(x) = e^x - n + x$ de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ donc strictement croissante sur cet intervalle. De plus $f(0) \leq 0$ et $f(n) > 0$ d'où le résultat.

2. $x_n = n - e^{x_n} \geq 0$ donc $\forall n,\ x_n \leq \ln(n)$. Ainsi $e^{x_n} \sim n$ donc (voir exercice 6.14 du poly de Mansuy)

$$x_n \sim \ln(n)$$

On écrit $\alpha_n = \ln(n) - x_n \geq 0$. On a donc $\alpha_n = o(\ln(n))$. En repartant de l'égalité de définition de x_n on obtient alors $e^{\ln(n)-\alpha_n} = n - \ln(n) + \alpha_n$ ce qui amène $\ln(n) - \alpha_n = \ln(n - \ln(n) + \alpha_n)$ puis $\alpha_n = -\ln(1 - \frac{\ln(n)-\alpha_n}{n}) \sim -\ln(1 - \frac{\ln(n)}{n})$. On utilise alors l'équivalent $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ qui se retrouve par exemple avec le théorème des accroissements finis. Bref,

$$u_n = \ln(n) - \ln(\ln(n)) + o(\ln(\ln(n)))$$

□

Exercise 2.2.10. *Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijective. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(\phi(n))_n$.*

Proof. On montre que l'ensemble des valeurs d'adhérence de ϕ_n est $\mathbb{R}$. Pour cela on se donne $q \in \mathbb{Q}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{r \in \mathbb{Q},\ |q - r| < \varepsilon\}$ est infini, donc $\{\phi^{-1}(r),\ r \in \mathbb{Q},\ |q - r| < \varepsilon\}$ n'est pas borné et ainsi $\forall N,\ \exists n > N,\ |q - \phi(n)| < \varepsilon$. Cela assure donc que q est une valeur d'adhérence de la suite. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, le résultat cherché est alors acquis. □

Exercise 2.2.11. *Montrer qu'une suite bornée converge si et seulement si elle admet exactement une valeur d'adhérence.*

Proof. Le sens direct est évident. Pour le sens retour, si (u_n) ne converge pas vers l'unique valeur d'adhérence a, alors on peut se munir d'une extractrice ϕ tel que $d(a, (u_{\phi(n)})) > \varepsilon$ pour un certain ε suffisamment petit. Alors $(u_{\phi(n)})$ est bornée, donc admet une valeur d'adhérence, qui nécessairement n'est pas a. Cela fournit une seconde valeur d'adhérence à (u_n) ce qui est une contradiction. □

Exercise 2.2.12. *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \to 1$. Que dire de u_n ? Indication : On pourra demander de montrer qu'une suite bornée converge si et seulement si elle admet exactement une valeur d'adhérence.*
Et si on abandonne l'hypothèse (u_n) bornée ?

Proof. La relation assure que si a est une valeur d'adhérence de (u_n), alors $2 - 2a$ l'est également, et $f(a) = -2 + 4a$ l'est donc également (en recomposant). Supposons par l'absurde qu'il existe $a \neq \frac{2}{3}$ une valeur d'adhérence de (u_n). Alors $4a - 2 - \frac{2}{3} = 4 \times (a - \frac{2}{3})$ donc la suite $f^{on}(a)$ diverge, ce qui contredit l'hypothèse de bornitude. Ainsi $(u_n)_n$ est bornée et n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, donc converge et il est immédiat que $\frac{2}{3}$ est la limite.
Si on abandonne l'hypothèse bornée, on va trouver un contre-exemple explicite en posant

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3}(2 + (-2)^k) & \text{si } n = 2^k \\ \frac{2}{3} & \text{sinon} \end{cases}$$

qui n'est pas bornée donc ne converge pas, et qui vérifie $u_n + \frac{1}{2}u_{2n} = 1$. □

Exercise 2.2.13. *Soit (a_n) une suite de $\mathbb{R}_+^*$ qui converge vers 0. Montrer que les ensembles $X^+ = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \geq n,\ a_m \leq a_n\}$ et $X^- = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \leq n,\ a_m \geq a_n\}$ sont infinis.*

Proof. On montre que X^+ n'est pas majoré. Soit donc $N \in \mathbb{N}$. On a $a_{N+1} > 0$, posons $\varepsilon = a_{N+1}/2 < a_{N+1}$. Par convergence vers 0, il existe M tel que $\forall m \geq M$, $u_m < \varepsilon$. Soit M_0 le plus petit de ces tels M. Nécessairement $M_0 > N + 1$, donc $M_0 - 1 > N$, et $M_0 - 1$ appartient à X^+, ce qui conclut.
On montre encore plus facilement que X^- n'est pas majoré. Soit $N \in \mathbb{N}$, et $m = \underset{1 \leq n \leq N}{u_n} > 0$. Il existe k tel que $u_k < m$. Soit k_0 le plus petit de ces tels k. Nécessairement $k_0 \geq N + 1$ et $k_0 - 1 \in X^-$. □

Exercise 2.2.14. *Montrer Bolzano-Weierstrauss dans $\mathbb{R}^d$ pour $||\cdot||_\infty$*

Proof. Chaque composante est bornée, on peut faire d extractions. □

Exercise 2.2.15. *Montrer que $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes.*

Proof. □

Exercise 2.2.16. *Soit $z_1, \ldots, z_p$ des complexes de module 1. Montrer que p est une valeur d'adhérence de $s_n = (z_1^n + \ldots + z_p^n)_n$. On pourra admettre le cas $p = 1$.*

Proof. Par récurrence sur p. L'initialisation est évidente. On factorise par z_p^n. Notons $y_i = \frac{z_i}{z_n}$. Soit donc ϕ une extractrice telle que $(y_1^{\phi(n)} + \ldots + y_{p-1}^{\phi(n)})_n \to p - 1$. De plus $s_{\phi(n)}$ est dans un fermé borné de dimension finie donc admet une valeur d'adhérence, et nécessairement celle-ci est de module p, notons la donc $pe^{i\theta}$. Idée générale : il existe un N tel que $e^{i\theta}$ est très proche de 1. De plus, être proche de $pe^{i\theta}$ force chacun des $n\theta_i$ à être proche de θ. De là, on peut rendre $\max_i(N|\theta - \theta_i|)$ arbitrairement petit, ce amène que s est proche de $pe^{iN\theta}$ donc de p. □

Exercise 2.2.17. *Soit $z_1, \ldots, z_p$ des complexes de module supérieur ou égal à 1 tels que $z_1^n + \ldots + z_p^n$ converge. Montrer que $z_1 = \ldots = z_p = 1$. Inidication : Utiliser l'exercice précédent.*

Proof. On se ramène au cas de complexes de module 1 en factorisant par le complexe de plus grand module. D'après l'exercise précédent p est une valeur d'adhérence de $(z_1^n + \ldots + z_p^n)_n$ donc la limite de cette suite est p. On peut alors par exemple regarder la partie réelle des z_i^n qui est majorée par 1. Il vient qu'elle tend vers 1 pour tout i puis que $z_i = 1$ pour tout i. □

Exercise 2.2.18. *Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $(\frac{\sigma(n)}{n})$ converge. Que dire de la limite ?*

Proof. On montre $l = 1$. Si $l < 1$ en choisissant $l < l' < 1$ on exhibe une contradiction avec l'injectivité. Si $l > 1$ on exhibe une contradiction avec la surjectivité. □

Exercise 2.2.19. *Soit $u_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, et $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, l'ensemble $\mathcal{B}(a, \varepsilon) \cap (u_n)$ est infini. Montrer que a est une valeur d'adhérence de u.*

Proof. Pour tout n on peut donc se munir d'une extractrice ϕ_n telle que $d((u_{\phi_n}), a) \leq \frac{1}{n}$. On définit alors notre extractice ψ par

$$\psi(n) = \phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \ldots \circ \phi_1(n)$$

Et on peut vérifier que $|u_\psi(n) - a| \leq \frac{1}{n}$ □

Exercise 2.2.20. *Soit u_n telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.*

Proof. Soit $a < b$ deux valeurs d'adhérence de la suite, $c \in]a, b[$ et $\varepsilon > 0$. Soit N tel que u fait des pas de moins de ε après N.
Soit $A \in \mathbb{R}$ tel que $A \geq N$ et soit $A < n < m$ tels que $|u_n - a| < \varepsilon$ et $|u_m - b| < \varepsilon$. Soit $M = \max k < m \mid u_k < c$. On a $n \leq M \leq m$ (quitte à prendre ε suffisamment petit, $M \geq n$), et de plus $u_M \leq c \leq u_{M+1}$ donc $|u_M - c| \leq |u_M - u_{M+1}| \leq \varepsilon$.
Remarquons que $M \geq A$, donc il existe une infinité de rangs tels que u est proche de c : c est une valeur d'adhérence (par exemple avec l'exercice 2.2.19). □

Exercise 2.2.21. *Exhiber une suite dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{R}$.*

Proof. Par exemple notons u la suite qui à $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}^{10}$ (écrit en base 10) associe $u_n = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$. Alors 0.1 est une valeur d'adhérence, et 1 est une valeur d'adhérence, et $u_{n+1} - u_n \to 0$, donc tout élément de $[0.1, 1]$ est une valeur d'adhérence de u.
Ensuite on dilate continument. D'abord $v_n = f(u_n)$ où $f(x) = -1 + 2\frac{1-x}{0.9}$, et tout élément de $[-1, 1]$ est une valeur d'adhérence de v_n, puis $w_n = (v_n)$
Sinon n'importe quelle bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Q}$. □

Exercise 2.2.22. *Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et (l_k) une suite de valeur d'adhérence de (u_n) qui tend vers l. Montrer que l est une valeur d'adhérence de (u_n).*

Proof. On note ϕ_k une extractrice associée à l_k, que l'on choisit de sorte que $d(l_k, (u_{\phi_k})) \leq \frac{1}{k}$. Il suffit de considérer l'extractrice $\psi : k \mapsto \phi_k \circ \ldots \circ \phi_1(k)$. □

Exercise 2.2.23. *Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, notée e. Montrer que $e \notin \mathbb{Q}$. Indication : Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.*

Exercise 2.2.24. *Nature de la série de terme général* $\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

Proof. Soit $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ et $\beta = 2 - \sqrt{3}$. On a pour tout n, $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{N}$. De là $|\sin(\pi\alpha^n)| = \sin(\pi\beta^n) \sim \pi\beta^n$ d'où la convergence de la série. □

Exercise 2.2.25. *Soit (w_n) une suite à valeurs dans $[0, 1]$ telle que pour tout n,*

$$w_{n+1}(1 - w_n) > \frac{1}{4}$$

. Nature et limite de (w_n).

Proof. On montre que la suite est croissante en utilisant que $\forall x,\ x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$. Nécessairement elle converge et la limite l doit vérifier $l(1 - l) \geq \frac{1}{4}$ et de là $l = \frac{1}{2}$. □

Exercise 2.2.26. *Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $u_0 \neq 0$ et pour tout n,*

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{u_n}$$

. Nature et limite de (u_n).

Proof. Remarquons que $\forall x > 0,\ 2 - \frac{1}{x} \leq x$ avec égalité si et seulement si $x = 1$. La suite est donc décroissante. Donc converge. Donc inégalité à la limite. Donc la limite est 1. □

Exercise 2.2.27. *Soit p_n, q_n deux suites d'entiers naturels, telles que $\frac{p_n}{q_n} \to x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $q_n \to +\infty$.*

Proof. La distance de x à $\frac{\mathbb{N}}{q_n}$ est minorée par $\varepsilon_n > 0$.

Sinon on peut aussi extraire par l'absurde une valeur d'adhérence que (q_n) et en déduire que $p_{\phi(n)}$ converge puis que x est rationnel. □

2.3 Numerical series

Exercise 2.3.1. *Soit (u_n) telle que $u_{n+1} = o(u_n)$. Montrer que $\sum_{k\geq n} u_k \sim u_n$.*

Proof. On se place à n suffisamment grand pour que $|u_{n+1}| \leq \varepsilon |u_n|$. Alors $\sum_{k\geq n+1} |u_k| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}|u_n|$ et de là $\sum_{k\geq n+1} u_k = o(u_n)$. Le résultat suit naturellement. □

Exercise 2.3.2. *Soit (u_n) une suite de réels positifs et*

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Montrer que les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Proof. On a $0 \leq v_n \leq u_n$ donc $\sum u_b$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ converge. On suppose que v_n converge. Alors $v_n \to 0$ donc $u_n \to 0$ et $v_n = u_n(1 + o(1)) = u_n + o(u_n)$. Supposons par l'absurde que u_n diverge, alors $\sum o(u_n) = o(\sum u_n)$ donc $\sum v_n \sim \sum u_n$ diverge. Non! □

Exercise 2.3.3. *Soit (u_n) une suite réelle telle que la série de terme général (u_n) diverge. Montrer qu'il existe (v_n) telle que $v_n = o(u_n)$ et telle que la série de terme général (v_n) diverge.*

Proof. Raisonner sur les sommes partielles (par exemple prendre $V_n = \ln(U_n)$). □

Exercise 2.3.4. *Montrer qu'il existe $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe ϕ un réordonnement de $\mathbb{N}$ (bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) tel que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{\phi(n)} = \lambda$.*

Proof. Prendre $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. □

Exercise 2.3.5. *Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente mais pas absolument convergente. Montrer que pour tout $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$, il existe σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{\sigma(n)} \to \lambda$.*

Exercise 2.3.6. *Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que la série de terme général $(\frac{\sigma(n)}{n^2})$ diverge.*

Proof. $S_{2n} - S_n$ est minoré par $\frac{1}{8}$ (majorer grossièrement $\frac{1}{k^2}$) donc le critère de Cauchy n'est pas vérifié. □

Exercise 2.3.7. *Soit (u_n) une suite réelle positive telle que la série de terme général u_n diverge. Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série $\frac{u_n}{U_n^\alpha}$.*

Exercise 2.3.8.

1. *Soit u_n une suite décroissante vers 0 telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$.*
2. *Exhiber une suite réelle positive u_n telle que la série de terme général u_n converge mais telle que nu_n ne tende pas vers 0*

Proof. On a $0 < (2n)u_{2n} \leq 2\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = 2(S_{2n} - S_n) \to 0$. De là $2nu_{2n} \to 0$ et il vient facilement $u_n = o(u_n)$. Puis prendre $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré, 0 sinon. □

Exercise 2.3.9. *Soit $\frac{p_n}{q_n}$ convergeant vers un irrationnel. Montrer que $p_n \to +\infty$ et $q_n \to +\infty$.*

Exercise 2.3.10. *Soit (z_n) une suite de complexe de partie réelle positive, et telle que les séries de terme général z_n et z_n^2 (respectivement) convergent. Montrer que $\sum |z_n|^2$ converge. Et si on abandonne l'hypothèse partie réelle positive ?*

Exercise 2.3.11.

1. *Équivalent de* $\ln(n!)$.
2. *Déterminer* $\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.
3. *Série de Bertrand un cran plus loin* $\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))^\alpha}$
4. *u_n et v_n tg de séries réelles convergentes, w_n telle que $u_n \leq w_n \leq v_n$. Montrer que w_n tg d'une série convergente (regarder d'abord $w_n - u_n$).*
5. *Condition sur a, b et c pour que la série de terme général $u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n-1} + c\sqrt{n-2}$ converge. Calculer sa limite dans ce cas.*
6. *(voir Marc Sage) Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective, et μ_n le ppcm de $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\ldots\phi(n)$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{\mu_n}$ converge.*
7. *Soit z_n une suite de complexe espacés d'au moins 1 deux à deux. Trouver α tel que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha z_n}$ converge absolument.*
8. *Avec les sommes de Riemann : calculer la limite de la série de terme général $(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$*
9. *Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1 et telle que $\frac{f'}{f}$ tende vers $-\infty$ en $+\infty$. Montrer ue la série de terme général $f(n)$ converge et calculer un équivalent de R_n le reste.*
10. *En utilisant Taylor-Lagrange sur $x \mapsto \ln(1+x)$, calculer la limite de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ (c'est $\ln(2)$). Retrouver le même résultat en remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$.*
11. *Calculer* $\sum_0^{+\infty} kx^k$

2.4 Limits and continuity of functions

Exercise 2.4.1. *La fonction $x \longmapsto \lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor$ admet-elle une limite en $+\infty$?*

Proof. $\forall x \in \mathbb{N},\ f(x) = 0$ et $f(x+\frac{1}{2}) = -1$ donc f n'admet pas de telle limite. □

Exercise 2.4.2. *A-t-on f continue sur un segment et jamais identiquement nulle sur un sous-intervalle de ce segment de $\Rightarrow f$ s'annule un nombre fini de fois.*

Proof. Non avec $x\sin(\frac{1}{x})$ □

Exercise 2.4.3. *Soit f, g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$\sup f = \sup g$$

Montrer que le graphe de f et le graphe de g se coupent.

Proof. Par continuité, le sup est atteint. On écrit $s = \sup f = \sup g = f(a) = f(b)$. On a alors $(f-g)(a) \geq 0$ et $(f-g)(b) \leq 0$ donc $f-g$ s'annule. □

Exercise 2.4.4.

1. *Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))_n$ est croissante. Montrer que f est croissante.*

2. *Et si on abandonne l'hypothèse de la continuité de f ?*

Proof.
1. Raisonnons par l'absurde en se donnant $a < b$ tels que $f(a) > f(b)$. Par continuité de f, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < b-a$ et $\forall x \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon], f(a) > f(x)$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand de sorte que $\frac{a}{N} < 2\varepsilon$. Alors la suite $(n\frac{a}{N})_n$ contient a et rencontre $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ donc la suite $(f(n\frac{a}{N}))_n$ n'est pas croissante, ce qui contredit les hypothèses de départ.

2. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. Pour tout x réel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nx \in \mathbb{Q} \longleftrightarrow x \in \mathbb{Q}$ donc $\forall x$, $(f(nx))_n$ est constante donc croissante.

□

Exercise 2.4.5. *Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 1 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$.*

Proof. On a immédiatement $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x^{2^{-n}})$. Or pour $x \neq 0$, $x^{2^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ donc $\forall x \neq 1$, $f(x) = f(1)$. Par continuité en 1. On vérifie immédiatement que les fonctions constantes sur $\mathbb{R}^*$ conviennent. □

Exercise 2.4.6. *Montrer que deux fonctions d'un intervalle ouvert, croissantes et dont la somme est continue sont continues.*

Proof. Soit $]a,b[$ l'intervalle de définition de f et g et soit $x \in]a,b[$. On justifie facilement que $\lim\limits_{x^-} f + \lim\limits_{x^-} g = \lim\limits_{x^-}(f+g) = (f+g)(x)$ par continuité de $f+g$. Or $\lim\limits_{x^-} f \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x^-} g \leq g(x)$ donc ces deux inégalités sont des égalités. Ceci étant vrai pour tout x et étant facilement montré de la même façon pour la limite en x^+, f et g sont continues. □

Exercise 2.4.7. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique et continue. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = f([a, a+\frac{T}{2}])$.*

Proof. Soit $a, b \in [0,T]$ tels que f atteigne son minimum et son maximum respectivement en a et b. Quitte à remplacer f par $-f$ on peut supposer $a < b$. Si $b - a \leq \frac{T}{2}$, a convient. Sinon b convient. □

Exercise 2.4.8. *Voir exercice 8.31 du poly de Mansuy. Soit f $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est infini. Difficulté : */***

Proof. Montrons que cet ensemble n'est pas majoré. Soit $A > 0$, par continuité de f, $f[0, A]$ est borné, mettons par M. f étant surjective, $M + 1$ admet un antécédent, soit x, et $-M - 1$ admet un antécédent, soit y. Nécessairement $x > A$ et $y > A$. Mais par continuité de f et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$. Cela conclut. □

Exercise 2.4.9. *Voir exercice 8.28 du poly de Mansuy. Soit f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que*

$$\forall x \in [0, 1], \qquad 0 < f(x) < g(x).$$

Montrer qu'il existe $D > C > 1$ tels que

$$\forall x \in [0, 1], \qquad Cf(x) < g(x) < Df(x).$$

*Difficulté : ***

Proof. On regarde la fonction $\frac{g}{f}$ définie et continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée. Notons m son minimum, atteint en a et M son maximum. Par hypothèse, $\frac{g}{f}(a) > 1$ donc $m > 1$. $\frac{1+m}{2}$ convient comme valeur de C. $M + 1$ convient comme valeur de D. □

Exercise 2.4.10. *Voir exercice 8.26 du poly de Mansuy. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Difficulté : *** (nécessite les notions de dénombrabilité)*

Proof. Montrons par l'absurde qu'il n'en existe pas en considérant f convenable. Si $f(\mathbb{Q})$ contient deux éléments distincts, soit $a < b$, alors par continuité de f, $[a, b] \subset f(\mathbb{R})$ donc $[a, b] \setminus \mathbb{Q} \subset f(\mathbb{Q})$. Or $[a, b] \setminus \mathbb{Q}$ est indénombrable tandis que $f(\mathbb{Q})$ est dénombrable. Non! Ainsi $f(\mathbb{Q}) = a$. Mais par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et par continuité de f, f est alors constante égale à a, ce qui contredit les hypothèses de départ. □

Exercise 2.4.11. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique. Montrer que f est uniformément continue.*

Proof. Notons T la période de f. f est uniformément continue sur $[0, 2T]$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha < \frac{T}{2}$ de l'uniforme continuité associé à ε :

$$\forall x, y \in [0, 2T], |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $x < y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| < \alpha$. On écrit la "division euclidienne" $x = nT+b$ où $n \in \mathbb{N}$ et $b < T$, et de même $y = mT + c$. On a $n \leq m \leq m+1$. Il vient $|f(x) - f(y)| = |f(b) - f((m-n)T + c)| < \varepsilon$ car $|b - ((m - n)T + c)| = |x - y| < \alpha$ et $0 \leq (m - n)T + c \leq T + c < 2T$. □

Exercise 2.4.12. *Soit f et g continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ qui commutent. Montrer qu'il existe x tel que $f(x) = g(x)$*

Proof. Par l'absurde $f < g$. Soit l un point fixe de f. Il vient $f(g(l)) = g(f(l)) = g(l)$ donc l'ensemble des points fixes de f est stable par g. Considérons $s = \sup\{l \mid f(l) = l\}$, qui existe car cet ensemble est non vide (résultat classique). Par continuité de f on a $f(s) = s$. Puis $g(s) \leq s$ par maximalité de s. De là $g(s) \leq s = f(s) < g(s)$. Absurde ! □

Exercise 2.4.13. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et D l'ensemble des points en lesquels f n'est pas continue. Montrer que D est au plus dénombrable.*

Proof. Soit $x \in D$. On a donc $f(x^+) - f(x^-) > 0$. On peut donc trouver un rationnel $r_x \in]f(x^-) - f(x^+)$. On définit ainsi une application injective (car strictement croissante) de D dans $\mathbb{Q}$. Il suit que D est au plus dénombrable. ☐

Exercise 2.4.14. *Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0 et en 1, telle que $f(1) = 1$ et $f(z_1 z_2) = f(z_1)f(z_2)$.*

i) Montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{C}^*$

ii) Montrer qu'il un existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que $f(x) = x^\alpha$ pour $x > 0$.

iii) Montrer que $f(e^{it}) = 1$ pour tout réel t.

iv) Conclure.

Proof.

i) La positivité est évidente. Soit $z \neq 0$. Supposons par l'absurde $f(z) = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(z^{1/2^n}) = 0$, donc par continuité en 1, $f(1) = 0$, ce qui est absurde.

ii) Soit $g = f_{\mathbb{R}_+^*}$, continue, strictement positive et multiplicative. On peut donc correctement définir $h = \ln(g)$ qui est continue et vérifie $h(ab) = h(a) + h(b)$. Le raisonnement suivant est alors classique : $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(x^n) = nh(x)$, puis $h(x^{p/q}) = \frac{p}{q}h(x)$. Par continuité de h et densité des rationnels, cela s'étend à : pour tout $y > 0$ $h(x^y) = yh(x)$ et ainsi $h = h(e)\ln$!

iii) Les racines n-ièmes de l'unité vérifient $f(z)^n = 1$ donc $f(z) = 1$. Par densité des racines de l'unité et continuité de f, c'est vrai pour tout complexe du cercle unité.

iv) f est donc de la forme $\rho e^{it} \mapsto \rho^\alpha$.

☐

Exercise 2.4.15. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue et telle que $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Montrer que*

$$f \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$$

Proof. Soit δ de l'uniforme continuité associé à 1. Soit M tel que $M\delta > 1$. Il vient $\forall n \in \mathbb{N}, \forall n \leq x < n + 1$,

$$f(x) \geq f(n) - M$$

D'où le résultat. ☐

Exercise 2.4.16. *Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. On note $Gr(f) = \{(x, y) \in E \times F \mid f(x) = y\}$.*

1. *Montrer que si f est continue, alors $Gr(f)$ est fermé dans $E \times F$.*
2. *Montrer la réciproque lorsque $f(E)$ est inclus dans un compact de F.*
3. *Trouver un contre-exemple si $f(E)$ n'est pas inclus dans un compact.*

Proof.

1. Soit (x_n, y_n) une suite de $Gr(f)$ qui converge vers $(x, y) \in E \times F$. Alors $x_n \to x$ donc par contuinité de f, $y_n = f(x_n) \to f(x)$, puis par unicité de la limité, $y = f(x)$ et finalement $(x, y) \in Gr(f)$.

2. Soit x_n une suite de E qui converge vers $x \in E$. On pose $y_n = f(x_n)$. Soit y une valeur d'adhérence de y_n, associée à une extractrice ϕ. Alors $(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)})$ est une suite d e$Gr(f)$ qui converge vers (x, y). $Gr(f)$ étant fermé, on a $(x, y) \in Gr(f)$ i.e. $y = f(x)$. Ainsi y_n admet au plus une seule valeur d'adhérence. $f(E)$ étant compacte, y_n en admet au moins une. Finalement y_n admet une et une seule valeur d'adhérence donc converge, vers $f(x)$.

3. Dans $\mathbb{R}$,
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
fournit un contre exemple.

□

Exercise 2.4.17. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue, bornée, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue*

Proof. Soit $\varepsilon > 0$. $f(\mathbb{R})$ est borné inclus dans un segment, mettons S. Par Heine, g est uniformément continue sur S. Soit γ de l'uniforme continuité de $g_{|S}$ associé à ε. Soit δ de l'uniforme continuité de f associé γ. Alors

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \gamma \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(y))| \leq \varepsilon$$

ce qui conclut. □

Exercise 2.4.18 ($f([a, b]) \subset g([a, b])$)**.** *Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues. On suppose $\forall x \in [a, b], \exists y \in [a, b], f(x) = g(y)$. Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(x)$*

Proof. Par l'absurde $f < g$. f étant continue, il existe x tel que $f(x) = \inf f$. Puis il existe donc y tel que $g(y) = \inf f$. Alors $f(y) < \inf f$ ce qui est impossible. □

Exercise 2.4.19 (Cordes de longueur $\frac{1}{n}$)**.** *Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1) = 0$.*

1. *Montrer qu'il existe $x \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{2}$.*

2. *Pour $n \geq 2$, montrer qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{n}$.*

3. *Trouver une fonction f telle que $\forall x \in [0, 1 - \frac{2}{5}]$, $f(x) \neq f(x + \frac{2}{5})$.*

4. *Sans corection ! Montrer qu'il existe $a > 0$, tel que : $\forall b \in]0, a]$, $\exists x \in [0, 1 - b]$ tel que $f(x) = f(x + b)$.*

Proof.

1. Soit $g = f(\cdot) - f(\frac{1}{2} + \cdot)$. On a $g(0) + g(\frac{1}{2}) = 0$ donc g touche 0.

2. Soit $g = f(\cdot) - f(\frac{1}{n} + \cdot)$. On a $g(0) + g(\frac{1}{n}) + \ldots + g(1 - \frac{1}{n}) = 0$ donc g touche 0.

3. Soit ϕ une fonction périodique de plus petite période $T = \frac{2}{5}$, par exemple $\phi(x) = \sin^2(\frac{2\pi x}{5})$. On va ajouter la bonne pente à ϕ pour avoir l'égalité en 0 et 1 : $f(x) = \phi(x) - x\phi(1)$. Alors écrivons

$$\begin{aligned} f(x) = f(x+T) &\Leftrightarrow T\phi(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{T} \in N \end{aligned}$$

Ainsi avec n'importe quelle période autre que $\frac{1}{n}$, on peut trouver des contre-exemples (et en l'occurence avec $T = \frac{2}{5}$).

□

Exercise 2.4.20. *Soit E un espace de Banach (espace vectoriel normé complet), et $f : E \to E$ une fonction k-lipschitzienne avec $k < 1$. On choisit $u_0 \in E$ quelconque, et on définit $u_{n+1} = f(u_n)$.*

1. *Montrer que u converge vers une limite l.*
2. *Montrer que l est le seul point fixe de f.*

Proof.

Par récurrence $||u_{n+1} - u_n|| \leq k^n ||u_1 - u_0||$. Donc u est de Cauchy, donc converge.

Pour l'unicité, soit l' tel que $f(l') = l'$. Alors $||l' - l|| = ||f(l') - f(l)|| \leq k||l' - l||$ donc $||l' - l|| = 0$. Pour le fait que l est un point fixe, f est lipschitzienne donc continue, donc $f(u_n) \to f(l)$. Mais $f(u_n) \to l$ donc $l = f(l)$. □

Exercise 2.4.21. *Soit C un compact convexe d'un espace vectoriel normé E. Soit $f : C \to C$ 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe. On pourra introduire $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})f(x)$ pour un $a \in C$ fixé.*

Proof. f_n est bien définie de C dans C car C est convexe, et est $1 - \frac{1}{n}$ lipschitzienne, donc admet un point fixe l_n. La suite l_n est à valeur dans le compact C donc admet une valeur d'adhérence l, associée à une extractrice ϕ. On remarque que la suite $f_{\phi(n)}(l) = \frac{1}{\phi(n)}a + (1 - \frac{1}{\phi(n)})f(l)$ converge vers $f(l)$. Puis

$$\begin{aligned} ||f(l) - l|| &\leq ||f(l) - f_{\phi(n)}(l)|| + ||f_{\phi(n)}(l) - f_{\phi(n)}(l_{\phi(n)})|| + ||f_{\phi(n)}(l_{\phi(n)}) - l_{\phi(n)}|| + ||l_{\phi(n)} - l|| \\ &\leq ||f(l) - f_{\phi(n)}(l)|| + (1 - \frac{1}{\phi(n)})||l_{\phi(n)} - l|| + 0 + ||l_{\phi(n)} - l|| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

D'où $f(l) = l$. □

Exercise 2.4.22. *Site de Michel Quercia. Evn :*

1. *87. Prendre $k_i \in K_i$ tels que $f(k_i) = x$, remarquer quepour chaque K_i on peut extraire une sous-suite convergente dans K_i et faire l'habituelle composée de dénombrables extractrices.*
2. *95*
3. *98 avec de Banach (complet) plutôt que de dimension finie, puis 101*

4. *102*

5. *109. Penser au fait que $||f(\cdot)||$ est continue. Pour la réciproque penser à la caractérisation des applications linéaires continues.*

6. *Montrer que la norme est continue. Solution : elle est 1-lipschitzienne.*

Continu :

1. *30*

2. *21*

3. *23*

4. *17*

5. *16*

2.5 Derivability

Exercise 2.5.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$.*

Proof.

$$\begin{aligned}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} &= \frac{(a+x-a)f(a)-af(x)}{x-a} \\ &= a\frac{f(a)-f(x)}{x-a} + f(a) \\ &\longrightarrow f(a) - af'(a)\end{aligned}$$

□

Exercise 2.5.2. *Montrer que la fonction*

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 \ si \ x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \ \ sinon \end{cases} \tag{2.1}$$

est $\mathbb{C}^{\infty}$ et à dérivées en 0 nulles.

Remarque. La fonction précédente est un bon contre-exemple à plusieurs fausses propriétés :

- Son développement de Taylor en 0 à tout ordre est nul mais elle n'est pas nulle sur un voisinage de 0.

- Elle est $\mathcal{C}^{\infty}$ et nulle sur un intervalle mais pas nulle partout.

Proof. Par récurrence, il existes des polynômes P_n et Q_n tels que

$$f^{(n)} = \frac{P_n}{Q_n} e^{-\frac{1}{x}}$$

$\square$

Exercise 2.5.3. *Soit f dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, et telle que $f(a) = f(b) = 0$, et soit $X = (x, 0)$ un point de l'axe des abscisses hors le segment $[a, b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe de f qui passe par X.*

Proof. Graphiquement, on voit qu'il faut maximiser (ou minimiser selon la position de c et le signe de f) $\mu(c) = \frac{f(c)}{c-x}$. Soit donc $c \in [a, b]$ qui maximise (ou minimise...) μ. En dérivant μ il vient $f'(c) = \frac{f(c)}{c-x}$, d'où le résultat. $\square$

Exercise 2.5.4. *Soit P un polynôme de degré n, montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $n + 1$ solutions. Variante : Soit P un polynôme de degré n, montrer que l'équation $P(x) = \ln(x)$ admet au plus $n + 1$ solution sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Proof. Par récurrence en utilisant Rolle. Pour la variante, on peut se ramener à un segment avant la récurrence. $\square$

Exercise 2.5.5. *Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f^2 + (1 + f')^2 \leq 1$. Montrer que f est nulle.*

Proof. Nécessairement $f' \leq 0$ donc f est décroissante. Puis par l'absurde si f est non nulle en a, et par disjonction de cas sur le signe de $f(a)$, soit f tend vers $+\infty$ en $-\infty$, soit f tend vers $-\infty$ en $+\infty$, d'où la contradiction. $\square$

Exercise 2.5.6. *Soit f $\mathcal{C}^\infty$ et P un polynôme de degré impair tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$,*

$$|f^{(n)}(c)| \leq |P(x)|$$

Montrer que f est nulle.

Proof. P s'annule, par exemple en 0. Alors toutes les dérivées de f en 0 sont nulles.
Avec égalité de Taylor-Lagrange, la conclusion vient tout de suite (pour tout x, pour tout n il existe c entre 0 et x tel que $f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini).
Sinon l'inégalité suffit aussi. $\square$

Exercise 2.5.7. *Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f est bornée par M_0 et f'' est bornée par M_2. Montrer que f' est bornée par $2\sqrt{M_0 M_2}$.*

Proof. On a $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c)$ pour un certain c, ce qui amène $|f'| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$. On prend le minimum du membre de droite pour h. $\square$

Exercise 2.5.8. *Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, deux fois dérivable sur $]-1, 1[$, telle que $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f''(c) = 0$.*

Proof. Rolle appliqué à $\phi(x) = f(x) - x$ fournit $a < 0 < b$ tels que $\phi(a) = \phi(b) = 0$. D'où $f'(a) = f'(b)$ puis l'existence du c recherché. $\square$

Exercise 2.5.9. *Soit f dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que $S(n) = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$ admet une limite quand $n \to +\infty$ et la déterminer.*

Proof. On écrit $f(x) = xf'(0) + o(x)$. En fixant N tel que le petit o est plus petit que ϵx lorsque $x \in [0, \frac{1}{N}]$, on a $\forall n \geq N$,

$$|S(n) - f'(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Or

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \\ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi la limite de $S(n)$ existe et vaut $\frac{f'(0)}{2}$. □

Exercise 2.5.10. *Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant 0, continue sur I. On suppose que $\exists \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$. Montrer que f est dérivable en 0.*

Proof. Soit $\varepsilon > 0$, pour x suffisamment petit, on a $\forall n$, $|f(\frac{x}{2^n}) - f(\frac{x}{2^{n+1}})| \leq \varepsilon |\frac{x}{2^{n+1}}|$. De là $|f(x) - f(\frac{x}{2^n})| \leq \varepsilon x$ puis $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon x$. Il vient que $\exists f'(0) = 0$. □

Exercise 2.5.11. *Soit $f = \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(0) = \lim_{+\infty} f = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$.*

Proof. Si f est identiquement nulle c'est bon. Sinon soit $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x) \neq 0$, par exemple $f(c) > 0$. Alors par le TVI, il existe $a < c < b$ tels que $f(a) = f(b) = \frac{f(c)}{2}$. Par Rolle, f' s'annule entre a et b. □

Exercise 2.5.12. *Quelle est la nature de la suite $u_n = \sin(\ln(n))$?*

Proof. On montre qu'on peut extraire deux sous-suite convergente vers deux valeurs différents. Soit $x_k = \exp(k\pi)$, $y_k = \exp(k\pi + \frac{\pi}{2})$, $n_k = \lceil x_k \rceil$ et $m_k = \lceil y_k \rceil$. Avec l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|\ln(x_k) - \ln(n_k)| \leq \frac{|n_k - x_k|}{|x_k|} \leq \exp -k\pi$$

Puis une deuxième application du IAF :

$$|\sin(\ln(x_k)) - \sin(\ln(n_k))| \leq |\ln(x_k) - \ln(n_k)| \leq \exp -k\pi$$

Ainsi les u_{n_k} converge vers 0. De même u_{m_k} converge vers 1. Ainsi u_n ne converge pas. □

Exercise 2.5.13. *Voir exercice 30 à la page* `http://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/analyse/unevariable/derivee&type=fexo`

Exercise 2.5.14. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^\infty$ et bornée.*

1. *Pour $k \geq 2$, on suppose que $f^{(k)}$ s'annule un nombre fini de fois. Montrer alors que pour tout $1 \leq p < k$, $f^{(p)}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.*

2. *En déduire que $f^{(k)}$ s'annule au moins $k-1$ fois.*

Proof. La propriété suivante se montre par récurrence. Soit $k \geq 1$ tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ et A tel que $x > A \Rightarrow |f^{(k)}(x)| > \varepsilon$. Alors pour tout $h \geq 0$, $|f(A+h)| \geq \varepsilon h^k + P(h)$ avec P un polynôme de degré inférieur ou égal à $k-1$.
En particulier, aucune dérivée de f ne vérifie l'hypothèse de la propriété, sans quoi f ne serait pas bornée en $+\infty$.
Pour $k \geq 2$, si $f^{(k)}$ s'annule un nombre fini de fois, alors $f^{(k-1)}$ est monotone en $+\infty$. D'après la remarque précédente, $f^{(k-1)}$ ne peut diverger en $+\infty$, donc est bornée (en $+\infty$), donc converge. Encore une fois d'après la remarque précédente, la limite doit être 0. Puisque $f^{(k-1)}$ est monotone en $+\infty$ et converge vers 0, elle est de signe constant en $+\infty$. On montre donc récursivement que $f^{(p)}$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout $1 \leq p < k$.
Puis on effectue des Rolle successifs. On utilise les zéros en $\pm\infty$ donc il s'agit de Rolle généralisé. □

Exercise 2.5.15. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.*

1. *Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V \setminus \{a\}$, $f(x) \neq f(a)$.*

2. *Si f' est continue en a, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V}$ soit injective. Et si f' n'est pas continue en a ?*

Proof.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V tel que $x \in V \setminus \{a\} \Rightarrow |\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)| \leq \varepsilon$. Avec $\varepsilon = \frac{f'(a)}{2}$ on a $|f(x) - f(a)| \geq |\frac{f'(a)}{2}(x-a)| > 0$.

2. Si f' est continue en a, f' est de signe strictement constant sur un voisinage de a, donc f y est strictement monotone donc injective. Un contre-exemple est fourni par $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x}) + \alpha x$ en 0 pour n'importe quel $|\alpha| < 1$.

□

Exercise 2.5.16. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $|f|$ admet en tout point une dérivée à droite et à gauche.*

Proof. On regarde en 0, le reste se fait pareil. Si $f(0) \neq 0$, f est dérivable en 0. Sinon $f(0) = 0$, et on regarde $f(x)/x$ pour $x > 0$ tendant vers 0. S'il existe $a > 0$ tel que f est de signe constant sur $]0, a[$ c'est gagné, sinon $f'(a) = 0$ et c'est gagné. □

Exercise 2.5.17. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f' \underset{x\to+\infty}{\to} l$. Monter que $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} l$. Que dire de la réciproque ?*

Proof. Soit $(x_n) \to +\infty$. Le TAF nous donne $\alpha_n \in [x_n, x_{n+1}]$ tel que $f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(\alpha_n)(x_{n+1} - x_n)$. On écrit alors

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(x_0) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f'(\alpha_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} l(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n}(f'(\alpha_k) - l)(x_k - x_{k-1}) \\ &= l(x_n - x_0) + \sum_{k=1}^{n} o(x_k - x_{k-1}) \\ &= l(x_n - x_0) + o(x_n) \end{aligned}$$

Et le résultat suit directement. Pour la réciproque, on regarde par exemple $x \mapsto x + \cos(e^x)$. □

Exercise 2.5.18 (f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires)**.**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. *On suppose que $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) \neq 0$. Montrer que f' est de signe constant.*

2. *Dans le cas général, montrer que $f'([a, b])$ est un intervalle.*

Proof.

1. Si f n'est pas injective, Rolle nous donne une dérivée nulle, donc f est injective, continue donc monotone.

2. Soit $c < d$ et $\alpha \in [f(c), f(d)]$. La contraposée de la question précédente, appliquée à $f(x) - \alpha x$, fournit γ tel que $f'(\gamma) - \alpha = 0$. Ainsi, $f'([a, b])$ est convexe, donc est un intervalle.

□

Exercise 2.5.19. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.*

Proof. Graphiquement, on voit qu'il faut maximiser $\phi : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Cette fonction est continue sur $]a, b]$, prolongeable par continuité en a par $f'(a)$. ϕ est donc bornée et atteint sa borne sup en $c \in]a, b[$ (les bornes sont correctement ouvertes car $\phi(a) = \phi(b)$). ϕ est dérivable sur $]a, b[$, de dérivée $\frac{(x-a)f'(x)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}$. Or $\phi'(c) = 0$, ce qui donne exactement la condition recherchée. □

Exercise 2.5.20. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall a, b \in \mathbb{R}$,*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\frac{a + b}{2})$$

Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Proof. $f'(x) = \frac{f(x+1)-f(x-1)}{2}$ est dérivable, donc récursivement f est $\mathcal{C}^\infty$. Ensuite on dérive l'expression de l'énoncé d'abord par rapport à a, puis par rapport à b. □

Exercise 2.5.21. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ admet au plus 2 racines réelles distinctes si n est pair, 3 si n est impair.*

Proof. Notons $P = X^n + aX + b$. P'' admet 0 comme unique racine, donc par Rolle P admet au plus 3 racines distinctes. Si P en admet 3, elles sont de multiplicité 1 (sinon P' admet au mois 3 racines et donc P'' au moins 2), et P ne peut pas tendre vers $+\infty$ en $\pm\infty$, donc n est impair. □

2.6 Taylor-Young

Exercise 2.6.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et $\lambda > 0$ telles que $\forall n$*

$$f^{(n)}(0) = 0$$
$$||f^{(n)}||_\infty \leq \lambda^n n!$$

Montrer que f est nulle.

Exercise 2.6.2. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^\infty$ telle que $f(0) = \lim_\infty f = 0$. Montrer qu'il y a une suite (a_n) strictement croissante telle que $f^{(n)}(a_n) = 0$ pour tout n.*

Proof. Par récurrence sur n, l'initialisation étant acquise avec $a_0 = 0$. Supposons donc donnés $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ tels que $f^{(k)}(a_k) = 0$, et par l'absurde que $f^{(n+1)}$ ne s'annule pas sur $[a_n, +\infty[$, par exemple est positive (quitte à remplacer f par $-f$). Choisissons $a > a_n$, ainsi $f^{(n)}$ est strictement croissante sur $[a, +\infty[$. On écrit

$$f(a+x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)x^n}{n!} = \frac{f^{(n)}(c_x)x^n}{n!}$$

et puisque $f \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, il vient $f(c_x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ ce qui est impossible, car $f^{(n)}$ est globalement minoré sur $[a, +\infty[$ par $f^{(n)}(a) > 0$. □

Exercise 2.6.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un application $\mathcal{C}^\infty$. On note*

$$M_k = ||f^{(k)}||_\infty$$

1. *On suppose M_0 et M_2 finis. Montrer*

$$M_1 \leq \sqrt{2M_1M_2}$$

2. *On suppose M_0 et M_n finis. Montrer*

$$\forall k \in [\![0, n]\!], M_k \leq 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$$

3. *La constante $\sqrt{2}$ est-elle optimale ?*

Proof.

1. On écrit classiquement

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} \\
f'(x) &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f''(x)h}{2} \\
&\leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}
\end{aligned}
$$

   La borne est minimisée en $h = \sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}$, et vaut $2\sqrt{M_0M_2}$. C'est bien mais ce n'est pas suffisant. On utilise la fameuse idée de la pseudo dérivée seconde en regardant à gauche et à droite de x

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(c_1)\frac{h^2}{2} \\
f(x-h) &= f(x) + f'(x)h + f''(c_2)\frac{h^2}{2} \\
\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2} &= f'(x)h + \frac{f''(c_1)+f''(c_2)}{2}\frac{h^2}{2} \\
|f'(x)| &\leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}
\end{aligned}
$$

   Et c'est gagné.

2. Par récurrence, mais c'est pas facile.

3. La réponse est oui. On va chercher à maximiser M_1 pour M_0 et M_2 fixés. S'il n'y pas la contrainte de M_2, on fait bouger f' très vite (un pic d'intégrale petite) pour atteindre des grandes valeurs tout en contraignant f. Avec M_2 on contrôle la vitesse de variation de f', mais on a donc tout intérêt à pousser les contraintes au maximum, c'est-à-dire de prendre f'' en créneau égale à M_2 puis $-M_2$. On fait le calcul et ça marche. Mais la fonction n'est que $\mathcal{C}_1$ donc on smooth f'' de plus en plus proche de la fonction en créneau. In fine on se rapproche de $\sqrt{2}$ arbitrairement proche.

□

Exercise 2.6.4. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.. La constante 4 est elle optimale ?*

Proof. On regarde ce qu'il se passe en $\frac{1}{2}$, en écrivant

$$
\begin{aligned}
f(1/2) \quad (= f(1-1/2)) \quad &= f(0) + 1/2 f'(0) + \frac{f''(c_1)}{8} \\
f(1/2) \quad (= f(1-1/2)) \quad &= f(1) - 1/2 f'(1) + \frac{f''(c_2)}{8}
\end{aligned}
$$

Et on conclut en considérant la première formule si $f(1/2) > 1/2$, la deuxième sinon.
La constante est optimale, pour cela on prend deux bouts de parabole entre 0 et 1/2 puis entre 1/2 et 1 (la dérivée seconde est un créneau valant 4 puis -4). □

2.7 Intégration sur un segment

Exercise 2.7.1.

$$I = \int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$$

Proof. (vérifiée par wolfram)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}} \\
&= \int_0^1 \frac{2u^3}{1+u} du \quad (u = \sqrt{x}) \\
&= \int_0^1 (2u^2 - 2u + 2) - \frac{2}{1+u} du \\
&= [\frac{2}{3}u^3 - u^2 + 2u - 2\ln(1+u)]_0^1 \\
&= \frac{5}{3} - 2\ln(2)
\end{aligned}$$

□

Exercise 2.7.2.

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3(x)dx}{\sqrt{\cos(x)}}$$

Proof. (vérifiée par wolfram)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3(x)dx}{\sqrt{\cos(x)}} \\
&= -\int_1^{1/2} \frac{1-u^2}{\sqrt{u}} du \quad (u = \cos x) \\
&= 2\int_{1/\sqrt{2}}^1 (1-s^4) ds \quad (s = \sqrt{u}) \\
&= 2[s - \frac{1}{5}s^5]_{\sqrt{2}/2}^1 \\
&= 2[1 - 1/5 - \sqrt{2}(1/2 - 1/40)] \\
&= \frac{1}{20}(32 - 19\sqrt{2})
\end{aligned}$$

□

Exercise 2.7.3.

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

Proof. (vérifiée par wolfram)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx \\
&= \int_1^e \frac{udu}{\sqrt{u+1}} \quad (u = e^x) \\
&= \int_2^{e+1} \frac{(u-1)}{\sqrt{u}}du \\
&= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} (s^2-1)ds \quad (s = \sqrt{u}) \\
&= [\frac{2}{3}s^3 - 2s]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \\
&= \frac{2}{3}(\sqrt{1+e}(e-2)+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

□

Exercise 2.7.4. *Soit f une application continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les primitives de f soient périodiques.*

Proof. f est T-périodique. Soit $\lambda = \int_0^T f$. On a $F(x+nT) = F(x) + n\lambda$. Si $\lambda \neq 0$, F est non bornée, continue, donc non périodique. Réciproquement, si $\lambda = 0$, F est T-périodique. □

Exercise 2.7.5 (Wallis)**.** *Calculer $W_n = \int_0^{\pi/2} cos^n(x)dx$.*

Proof.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} cos^{n+2}(x)dx &= W_n - \int_0^{\pi/2} cos^n(x)sin^2(x)dx \\
&= W_n + \frac{1}{n+1}\left([cos_{n+1}sin]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} cos_{n+2}(x)dx\right) \\
W_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2}W_n
\end{aligned}$$

Leading to

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{1\times 3\times \ldots \times (2n-1)}{2\times 4\times \ldots \times 2n}W_0 \\
&= \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}W_0 \\
&= \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= \frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)} W_1 \\ &= \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

□

Exercise 2.7.6. *Montrer que la fonction*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1 + \frac{\lambda k}{n})} \end{cases}$$

est bien définie et continue.

Proof. Clairement $f(0) = 1$. À $\lambda > 0$ on note a_n le terme général dont on veut calculer la limite et on calcule

$$\begin{aligned} \ln(a_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{\lambda k}{n}) \\ &\to \int_0^1 \ln(1 + \lambda x) dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_1^{1+\lambda} \ln(u) du \\ &= \frac{1}{\lambda} [u \ln(u) - u]_1^{1+\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} ((1 + \lambda) \ln(1 + \lambda) - \lambda) \end{aligned}$$

Ce qui montre que la fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour la continuité en 0, on écrit

$$\begin{aligned} (1 + \lambda) \ln(1 + \lambda) - \lambda &= \lambda^2 - \frac{\lambda^2}{2} + o(\lambda^2) \\ \frac{1}{\lambda}((1 + \lambda) \ln(1 + \lambda) - \lambda) &= O(\lambda) \\ &\to 0 \\ \exp\left(\frac{1}{\lambda}((1 + \lambda) \ln(1 + \lambda) - \lambda)\right) &\to 1 \end{aligned}$$

□

Exercise 2.7.7. *Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer*

1. *la limite de* $\int_0^1 x^n f(x)dx$

2. *la limite de* $\int_0^1 nx^n f(x)dx$

Proof.

1. On sépare entre $[0, 1-\delta]$ et $[1-\delta, 1]$ pour trouver deux termes bornés par ε.

2. On écrit entre $[1-\delta, 1]$

$$nx^n f(x) = nx^n f(1) + nx^n(f(x) - f(1))$$
$$\int_{1-\delta}^1 nx^n f(1) = f(1)\frac{n}{n+1}(1-(1-\delta)^n)$$

Ainsi pour n assez grand, $\int_0^1 nx^n f(x)dx$ est proche à ε près de $f(1)$.

□

Exercise 2.7.8. *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$*, dérivable en* 0 *et telle que* $f(0) = 0$*. On fixe* $\alpha > 0$*, étudier la limite de la suite*

$$\sum_{k=1}^n f(\frac{1}{n+k\alpha})$$

Proof. On écrit $f(x) = f'(0)x + O(x^2)$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f(\frac{1}{n+k\alpha}) &= \sum_{k=1}^n f'(0)\cdot\frac{1}{n+k\alpha} + O(\frac{1}{n^2})\\ &= f'(0)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\alpha\frac{k}{n}} + o(1)\\ &\to f'(0)\int_0^1 \frac{1}{1+\alpha x}dx\\ &\to \frac{f'(0)}{\alpha}\ln(1+\alpha)\end{aligned}$$

□

Exercise 2.7.9. *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ *telle que* $\int_a^b x^p f(x)dx = 0$ *pour tout* $p = 0, \dots, n$*. Montrer que* f *admet au moins* $n+1$ *zéros.*

Proof. Clairement on peut alors remplacer x^p par n'importe quel polynôme de degré inférieur à n. Si f ne change de signe que $m < n+1$ fois, mettons en $z_1, \dots, z_m$, alors $f(x)P(x)$ est de signe constant, où $P(X) = (X-z_1)\dots(X-z_m)$ donc son intégrale ne peut pas être nulle. □

Exercise 2.7.10. *Déterminer la limite de la somme* $\sum_{k=1}^n \sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2})$*.*

Proof. On écrit $\sin(\frac{k}{n^2}) = \frac{k}{n^2} + O(\frac{k^2}{n^4})$, d'où le fait que la somme tende vers

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sin(x) &= [x(-\cos(x))]_0^1 + \int_0^1 cos(x)dx \\ &= \sin(1) - \cos(1)\end{aligned}$$

□

Exercise 2.7.11. *Soit $A_1, \ldots, A_n$ un polynôme régulier inscrit dans le cercle unité. Déterminer la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_1A_k$.*

Proof. Sans perte de généralité, $A_1 = 1$. Ainsi $A_k = e^{2ik\pi/n}$ et on a

$$\begin{aligned}A_1A_k &= |1 - e^{2i\theta_k}| \\ &= |2i\sin(\theta_k)| \\ &= 2|\sin(\theta_k)|\end{aligned}$$

La somme est alors une somme de Riemann pour la quantité

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin(\theta)|d\theta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)d\theta = \frac{4}{\pi}$$

□

Exercise 2.7.12. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $T > 0$ tel que $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)dt$ soit constante. Montrer que f est T-périodique.*

Proof. On dérive par rapport à x. □

Exercise 2.7.13. *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe. Montrer que*

$$\phi(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(t))dt$$

Proof. Vrai sur les sommes de Riemann. □

2.8 Convexity

Exercise 2.8.1. *Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes. Que dire de la convexité de $\min(f, g)$? De $\max(f, g)$?*

Exercise 2.8.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, majorée. Montrer que f est constante*

Exercise 2.8.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que tout minimum local de f est minimum global*

Exercise 2.8.4. *Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels positifs tels que $\prod a_i = 1$. Montrer que*

$$\prod_{i=1}^n (2 + a_i) \geq 3^n$$

et donner le cas d'égalité.

Proof. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ est un cas d'égalité. Cela conduit à utiliser l'inégalité arithmético-géométrique avec $1, 1, a_i$ ce qui donne $\frac{2+a_i}{3} \geq a_i^{\frac{1}{3}}$. De là suit l'inégalité. Le cas d'égalité est celui de l'IAG, donc uniquement pour les a_i tous égaux à 1. □

Exercise 2.8.5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y$,*

$$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.

Proof. Vrai pour tous les diadiques puis densité des diadiques. □

Exercise 2.8.6. *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ des réels strictement positifs*

1. *Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$*
2. *Montrer que $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i}{x_j} \geq n^2$.*

Proof.

1. Concavité de ln : $\ln(\frac{1}{n}\sum \frac{x_i}{x_{i+1}}) \geq \frac{1}{n}\sum \ln(\frac{x_i}{x_{i+1}}) = 0$
2. Cas $n = 2$ de l'inégalité précédente pour toute paire i, j.

□

Exercise 2.8.7. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que*

$$\forall x \in]a, b[,\ \exists \varepsilon > 0,\ f(x) = \frac{1}{2}(f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon))$$

Montrer que f est convexe. En considérant $-f$, en déduire qu'elle est affine.

Proof. Notons $\Delta_x(y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. On raisonne par l'absurde et on suppose disposer de $u < v < w$ tels que $\Delta_u(v) > \Delta_u(w)$. On regarde alors $h : x \mapsto f(x) - f(u) - (x-u)\Delta_u(w)$ qui possède la même propriété que f et de plus vérifie $h(u) = h(w) = 0$ et $h(v) > 0$. En considérant $y = \inf\{x \mid h(x) = \sup h\}$ on obtient une contradiction.

Ensuite le même raisonnement appliqué à $-f$ montre que f est concave. De là f est à la fois convexe et concave, elle est donc affine. □

Exercise 2.8.8. *Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Pour $\alpha > 0$ on pose $M_\alpha(x_i) = (\frac{1}{n}\sum_i x_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Montrer que si $0 < \alpha < \beta$, alors $M_\alpha \leq M_\beta$. Déterminer $\lim_{\alpha\to 0} M_\alpha$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} M_\alpha$*

Proof. Tout d'abord $\alpha \leq 1 \leq \beta \Rightarrow M_\alpha \leq M_1 \leq M_\beta$. La première inégalité (resp. la deuxième) vient de ce que $x \mapsto x^\gamma$ est concave (resp. convexe) lorsque $\gamma \leq 1$ (resp. $\gamma \geq 1$).
Ensuite dans le cas général, on écrit

$$\begin{aligned} M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) &= M_1(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\leq M_{\beta/\alpha}(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)^{\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\alpha}} \\ &= M_\beta(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

En factorisant par $\max(x_i)$, clairement $M_\alpha(x_i) \underset{\alpha\to+\infty}{\to} \max(x_i)$. Pour la limite en 0 on écrit $x_i = e^{t_i}$ et

$$\begin{aligned}
M_\alpha(x_i) &= \left(\frac{1}{n}\sum e^{t_i\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= (1 - \alpha\frac{\sum t_i}{n} + o(\alpha))^{1/\alpha} \\
&= e^{\sum t_i/n + o(1)} \\
&\underset{\alpha\to 0}{\to} e^{M_1(\ln(x_i))}
\end{aligned}$$

□

Exercise 2.8.9. *Soit $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Montrer que $\ln(f)$ est convexe si et seulement si $\forall a > 0$, f^a est convexe.*

Proof.
($\Rightarrow$) $\ln(f^a) = a\ln(f)$ est convexe. Or exp est convexe croissante donc $f^a = \exp(\ln(f^a))$ est convexe.
($\Leftarrow$) On a f^a convexe $\Rightarrow \forall b > a$ f^b convexe. Toute l'information de l'hypothèse se trouve donc pour a petit, d'où l'idée de faire tendre a vers 0. Fixons x, y, λ. Notons $X = \ln(f(x))$, $Y = \ln(f(y))$ et $Z = \ln(f(\lambda x + (1-\lambda)y))$. On exprime la convexité de f^a :

$$\forall a > 0, \quad e^{aZ} \leq \lambda e^{aX} + (1-\lambda)e^{aY}$$

De là $\phi : a \mapsto \lambda e^{aX} + (1-\lambda)e^{aY} - e^{aZ}$ est positive sur $\mathbb{R}^*+$. Mais $\frac{\phi(a)}{a} \underset{a\to 0}{\to} \lambda X + (1-\lambda)Y - Z$. D'où finalement $\lambda X + (1-\lambda)Y - Z \geq 0$, ce qui est la condition souhaitée. □

Exercise 2.8.10. *Montrer que pour tout $x > 1$, on a*

$$x^n - 1 \geq n(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}})$$

Proof. On factorise par $x - 1$: on veut donc montrer

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k \geq n x^{\frac{n-1}{2}}$$

On utilise la convexité de $y \mapsto \exp(y\ln(x))$ et on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{k\ln(x)} \\
&\geq \exp(\ln(x)(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} i)) \\
&\geq x^{\frac{n-1}{2}}
\end{aligned}$$

□

Exercise 2.8.11. *(Éventuellement la première question peut juste servir d'indication) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.*

1. *On suppose que $\lim_{+\infty} f = 0$, montrer que f est positive.*
2. *On suppose que f admet une asymptote. Montrer que la courbe est toujours au dessus de l'asymptote.*

Proof.

1. Sinon on peut trouver x, y tels que $\Delta_x(y) > 0$.
2. On regarde la différence de f et de son asymptote, qui reste convexe et on utilise la question 1.

□

Exercise 2.8.12. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite dans $\mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

Proof. Par croissance des cordes, on a $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ croissante. Cela conclut. □

Exercise 2.8.13. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ positive, bornée, de classe $\mathbb{C}^2$ telle que $f \leq f''$.*

1. *Montrer que f est convexe et décroissante.*
2. *Montrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.*
3. *Soit g et h définies par $g(x) = f(x)e^x$ et $h(x) = (f'(x) + f(x))e^{-x}$ pour $x \geq 0$. Étudier les variations de g et le signe de h.*
4. *En déduire que pour $x \geq 0$, on a $f(x) \leq f(0)e^{-x}$.*

Proof.

1. La convexité vient de ce que $f'' \geq 0$. f' est croissante. Si elle n'est pas tout le temps négative, f diverge en $+\infty$.
2. f et f' convergent par monotonie. Donc f' converge vers 0 (sinon f ne converge pas). Puis si f converge vers une limite strictement positive, f'' reste grande et donc f' diverge.
3. On a $h' = (f'' - f)e^{-x} \geq 0$. Donc h est croissante et $h \underset{+\infty}{\to} 0$, donc h est toujours négative. Il suit que g est décroissante.
4. Immédiat

□

Exercise 2.8.14. *Montrer que pour tout $a, b, x, y > 0$, on a*

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x + y) \ln \frac{x + y}{a + b}$$

Proof. $f : x \mapsto x \ln x$ est convexe d'où

$$f(\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}) \leq \frac{a}{a+b}f(\frac{x}{a}) + \frac{b}{a+b}f(\frac{y}{b})$$

□

Exercise 2.8.15. *Montrer qu'une fonction sur un intervalle ouvert est convexe si et seulement si elle s'écrit comme le* sup *d'une famille de fonctions affines.*

Proof. Soit f définie sur I affine. Par croissance des pentes il existe pour tout $y \in I$, $\lim\limits_{x \to x^-} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, que l'on note $a(y)$. On note $f_y : x \to f(y) + a(y)(x-y)$ (la tangente à gauche). On a $f = \sup_{y \in I} f_y$. Réciproquement, on montre qu'un tel sup est convexe. □

2.9 Local and asymtotic analysis

Exercise 2.9.1. *Déterminer les* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $\sin(\lambda x) \underset{+\infty}{=} o(\sin(x))$

Proof. Si $\lambda \neq 0$, $\sin(\lambda x)^{-1}(\{1\})$ est non majoré, donc on nie le petit o avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$. □

Exercise 2.9.2. *Soit* $a, b > 0$. *Déterminer un équivalent de* $\ln(\ln(ax+b)) - \ln(\ln(x))$ *en* $+\infty$.

Proof.

$$\begin{aligned}
\ln(\ln(ax+b)) &= \ln(\ln(ax) + \ln(1 + \frac{b}{ax})) \\
&= \ln(\ln(ax)) + \ln(1 + \frac{\frac{b}{ax} - \frac{b^2}{2(ax)^2}}{\ln(a) + \ln(x)}) \\
&= \ln(\ln(x)) + \ln(1 + \frac{\ln(a)}{\ln(x)}) + o()
\end{aligned}$$

□

Exercise 2.9.3. *Posons* $f_0 : x \mapsto 1 - x$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{n+1} = \frac{1}{2 - f_n}$$

Déterminer le DL en 0 à l'ordre $m \in \mathbb{N}$ *de* f_n.

Proof. On remarque que f_n est une homographie. On écrit donc

$$f_n = \frac{a_n x - b_n}{c_n x - d_n}$$

ce qui conduit à deux systèmes de deux relations de récurrence mutuellement récursives:

$$f_{n+1}(x) = \frac{c_n x - d_n}{(2c_n - a_n) - (2d_n - b_n)}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} & = c_n \\ b_{n+1} & = d_n \\ c_{n+1} & = (2c_n - a_n) \\ d_{n+1} & = (2d_n - b_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n+2} & = 2a_{n+1} - a_n \\ b_{n+2} & = 2b_{n+1} - b_n \end{cases}$$

On résout pour trouver $a_n = n - 1$, $c_n = n$ et $b_n = d_n = -1$. De là le développement à l'ordre m

$$f_n(x) \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k n^{k-1} x^k + o(x^m)$$

□

Exercise 2.9.4. *Soit $\alpha > 0$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que*

$$e^{(x+1)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} e^{x^\alpha}$$

Proof.

$$\begin{aligned} e^{(x+1)^\alpha} &= e^{x^\alpha(1+\frac{\alpha}{x}+o(\frac{1}{x}))} \\ &= e^{x^\alpha} e^{\frac{\alpha}{x^{1-\alpha}}+o(\frac{1}{x^{1-\alpha}})} \end{aligned}$$

D'où la condition $\alpha < 1$. □

Exercise 2.9.5. *Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que*

$$a\sin(x) + b\tan(x) \underset{0}{=} x + O(x^5)$$

Proof.

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + O(x^5) \\ \tan(x) &\underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + O(x^5) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b & = 1 \\ -a + 2b & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a & = \frac{2}{3} \\ b & = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Exercise 2.9.6. *Déterminer le DL à l'ordre* 8 *en* 0 *de*

$$(\cos(x)-1)(sh(x)-x)-(ch(x)-1)(\sin(x)-x)$$

Proof.

$$\begin{aligned}(\cos(x)-1)(\mathrm{sh}(x)-x) &= (-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5))(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6))\\ (\mathrm{ch}(x)-1)(\sin(x)-x) &= (\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5))(\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+o(x^6))\\ (\cos(x)-1)(\mathrm{sh}(x)-x)-(\mathrm{ch}(x)-1)(\sin(x)-x) &= -\frac{x^5}{6}+o(x^8)\end{aligned}$$

□

Exercise 2.9.7. *Trouver la limite en* $+\infty$ *de*

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\ln(\ln(x+1))-\ln(\ln(x)) &= \ln(\ln(x)+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))-\ln(\ln(x))\\ &= \ln(1+\frac{1}{x\ln(x)}+o(\frac{1}{x\ln(x)}))\\ &= \frac{1}{x\ln(x)}+o(\frac{1}{x\ln(x)})\\ \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} &= e^{x\ln(x)(\frac{1}{x\ln(x)}+o(\frac{1}{x\ln(x)}))}\\ &= e^{1+o(1)}\\ &\underset{+\infty}{\longrightarrow} e\end{aligned}$$

□

Exercise 2.9.8. *Déterminer le DL à l'ordre* 5 *en* 0 *de*

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$$

Proof. $x-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{4\times 5!}+o(x^5)$ □

Exercise 2.9.9. *Déterminer le DL à l'ordre* 5 *en* 0 *de*

$$(\cos(x))^2$$

Proof. $1-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^5)$ □

Exercise 2.9.10. *Déterminer le DL à l'ordre* 3 *en* 0 *de*

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$$

Proof. $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ □

Exercise 2.9.11. *Trouver une relation de récurrence sur les coefficients du DL de*

$$f : x \mapsto e^{\arctan(x)}$$

Proof. On dérive une fois f pour trouver la relation $f'(x) = (1+x^2)f(x)$. Cette relation se réécrit comme une relation de récurrence sur les coefficients :

$$(k+2)a_{k+2} = a_{k+1} + ka_k$$

en utilisant l'unicité du développement limité. □

Exercise 2.9.12. *Soit* $f : x \mapsto xe^{x^2}$. *Montrer que* f *est bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Déterminer un développement limité à l'ordre 6 en* 0 *de* f^{-1}.

Proof. La bijectivité est évidente. Remarquons que la fonction f est impaire. Ainsi $-f^{-1}(f(x)) = -x = f^{-1}(f(-x)) = f^{-1}(-f(x))$ donc par surjectivité de f on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-f^{-1}(t) = f^{-1}(-t)$, bref f^{-1} est impaire et son développement limité en 0 s'écrit donc

$$f^{-1}(x) \underset{0}{=} a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6)$$

On injecte alors le DL de f et on identifie au DL de l'identité pour finalement trouver

$$f^{-1}(x) \underset{0}{=} x - x^3 - \frac{7}{2}x^5 + o(x^6)$$

□

Exercise 2.9.13. *Montrer que* $x + \ln(x) = n$ *admet une unique solution* x_n *dans* $\mathbb{R}$ *et donner un développement asymptotique à trois termes de* x_n.

Proof. Existence et unicité sont évidentes. On remarque que $x_n \leq n$ et que $x_n \to +\infty$. Ensuite il s'agit de développement et de réinjections successives dans l'équation $x_n = n - \ln(x_n)$ pour trouver

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o(\frac{\ln(n)}{n})$$

□

Exercise 2.9.14. *À l'aide d'une étude asymptotique de* $x \mapsto \sqrt{x^4 + x^3 + 1}$, *montrer que* $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \mid y^2 = x^4 + x^3 + 1\ \}$ *est fini.*

Proof. On obtient le développpement $\sqrt{x^4 + x^3 + 1} \underset{+\infty}{=} x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{72x} + o(\frac{1}{x})$. De là pour n assez grand, $|\frac{1}{72n} + o(\frac{1}{n})| < \frac{1}{8}$. De là l'ensemble est majoré et dans $\mathbb{Z}^2$ donc fini. □

Exercise 2.9.15. *Montrer pour $n \in \mathbb{N}$ que l'équation*

$$P_n(x) = x^n + \ldots + x^2 + x - 1 = 0$$

admet une unique solution réelle positive u_n. Trouver un développement asymptotique à deux dermes de u_n.

Proof. L'unicité vient par stricte croissance sur $\mathbb{R}^+$. L'existence suit du TVI, de la valeur en 0 et de la valeur en 1 de P_n. Ensuite x_n est strictement décroissante car à $x > 0$ fixé, $(P_n(x))_n$ strictement croissante. Ainsi x_n converge, mettons vers $l \in [0, 1[$. On a donc d'une part $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(l) < 0$ i.e. $1 - l^n < 2(1 - l)$ donc $1 \leq 2(1 - l)$ et d'autre part pour tout $\lambda > l$ il existe un rang tel que $P_n(\lambda) > 0$ d'où $\frac{1}{1-\lambda} > 2$. Bref nécessairement $1 = 2(1 - l)$ puis $l = \frac{1}{2}$. Par ailleurs on peut toujours écrire $u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$. On étudie $\varepsilon_n = u_n - \frac{1}{2}$. On a

$$u_n^{n+1} - 2\varepsilon_n = 0$$

d'où pour tout $\alpha > 0$, $\varepsilon_n = o((\frac{1}{2} + \alpha)^n)$. En particulier $n\varepsilon_n = o(1)$. On écrit alors

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_n &= (\frac{1}{2} + \varepsilon_n)^{n+1} \\ &= e^{(n+1)(\ln(\frac{1}{2}) + \ln(1+2\varepsilon_n)))} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} e^{2(n+1)\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n)} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}(1 + o(1)) \end{aligned}$$

Et finalement $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + o(\frac{1}{2^n})$. □

Exercise 2.9.16. *Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(x) - \frac{1-ax^2}{1-bx^2} = o(x^n)$ avec n maximal.*

Proof. On trouve $a = -\frac{5}{12}, b = \frac{1}{12}$. On écrit le DL ce cos :

$$cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)$$

Puis celui de $\frac{1-ax^2}{1-bx^2}$ (après calculs):

$$\frac{1 - ax^2}{1 - bx^2} = 1 + (a - b)x^2 - b(a - b)x^4 + b^2(a - b)x^6 + o(x^6)$$

On a alors

$$\cos(x) - \frac{1 - ax^2}{1 - bx^2} = o(x^n) = (-\frac{1}{2} - (a - b))x^2 + (\frac{1}{24} + b(a - b))x^4 + (-\frac{1}{720} - b^2(a - b))x^6 + o(x^6)$$

Ce qui conduit aux valeurs annoncées. □

Exercise 2.9.17. *Soit $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$,*

$$f(x - y)f(x + y) \leq f(x^2)$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f''(x) \leq f'(x)^2$$

Proof. On applique Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $f(x-y)$ et $f(x+y)$, puis on multiplie les égalités pour obtenir

$$f(x-y)f(x+y) - f(x^2) = y^2(f(x)f''(x) - f'(x)^2) + o(y^2)$$

Puis pour y suffisamment petit, $f(x-y)f(x+y) - f(x^2)$ est du même signe que $f(x)f''(x) - f'(x)^2$. □

Exercise 2.9.18. *Déterminer*

$$\inf\{\sup_{[0,1]} |f''| \mid f \in \mathbb{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0)=0,\ f(1)=1,\ f'(0)=f'(1)=0\}$$

Proof. Soit α la réponse. Soit f dans l'ensemble décrit. On peut écrire $f(1/2) = f(1-1/2) = f(0+1/2)$. On écrit les deux égalités de Taylor-Lagrange correspondantes

$$f(1/2) = 1 + \frac{f''(c_1)}{8} \qquad c_1 \in]1/2, 1[$$
$$f(1/2) = \frac{f''(c_2)}{8} \qquad c_2 \in]0, 1/2[$$

Selon la position de $f(1/2)$ par rapport à $1/2$, cela apporte $\alpha \geq 4$. Pour l'égalité, on prend l'exemple de $x \mapsto 2x^2$ entre 0 et $\frac{1}{2}$, et $1 - 2(x-1)^2$ entre $1/2$ et 1 (on obtient cet exemple en intégrant deux fois 4 sur $[0,1/2]$ et -4 sur $[1/2,1]$).

□

2.10 Differential equations

Exercise 2.10.1. *Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, T-périodique. Montrer que l'équation $y' + ay = f$ admet une unique solution qui soit T-périodique.*

Proof. La méthode de la variation des constantes amène

$$y(x) = e^{-ax}(K + \int_0^x e^{at} f(t)dt)$$

. Avec le changement de variable $s = t - T$ pour $y(x-T)$ on trouve

$$y(x) - y(x-T) = e^{-xT}(K + \int_0^T e^{aT} f(t)dt)$$

Ainsi y est T-périodique si et seulement si $K = -\int_0^T e^{aT} f(t)dt$. □

Exercise 2.10.2. *Trouver les solutions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation*

$$y'' + y = \max(e^x, 1)$$

vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$

Proof. Sur $\mathbb{R}^+$ la solution générale est $A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{e^x}{2}$ d'où pour respecter les conditions au bord $y_{|\mathbb{R}^+} = \frac{1}{2}(e^x - cos(x) - sin(x))$. Sur $\mathbb{R}^-$ la solution générale est $A\cos(x) + B\sin(x) + 1$ d'où pour respecter les conditions au bord $y_{|\mathbb{R}^-} = 1 - \cos(x)$. On vérifie enfin le bon raccord $y''(0) = 0$. □

Exercise 2.10.3. *Résoudre* $y' = |y - t|$.

Proof. Là où $y \geq t$ on a y de la forme $t + 1 + Ke^t$. Là où $y \leq t$, on a y de la forme $t - 1 + Ke^{-t}$. On remarque que dans tous les cas, $y(t) - t$ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$. Il ne peut donc y avoir au plus qu'un point de raccord. Ainsi trois situations se présentent

1. si $y \leq t$ pour tout t, on a $y = x - 1 - Ke^{-x}$ avec $K \geq 0$
2. si $y \geq t$ pour tout t, on a $y = x + 1 + Ke^{x}$ avec $K \geq 0$
3. sinon y s'annule une seule fois, mettons en t_0, et alors $\forall t > t_0,\ y(t) = t + 1 - e^{t-t_0}$ et $\forall t \geq t_0,\ y(t) = t - 1 + e^{t_0 - t}$.

□

Exercise 2.10.4. *Soit* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ *telle que* $f' + f$ *bornée sur* $\mathbb{R}^+$. *Montrer que* f *est bornée.*

Proof. Soit $z = f' + f$. On écrit la solution générale de cette équation différentielle avec la variation de la constante. Il est alors évident que f est bornée. □

Exercise 2.10.5. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Trouver les fonctions dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant*

$$f'(x) = f(\lambda - x)$$

Proof. f est $\mathcal{C}^2$ et vérifie $f'' + f = 0$. Cela conduit à la solution générale $f = A\sin(x + \phi)$. La condition $f'(x) = f(\lambda - x)$ impose alors $\frac{\pi}{2} - \phi = \lambda + \phi \mod 2\pi$. et finalement $f = A\sin(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2})$. □

Exercise 2.10.6. *Soit* $p \geq q$ *deux fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soit* f *une solution de* $y'' + py = 0$ *et* g *une solution de* $y'' + qy = 0$. *Montrer que* f *s'annule entre deux zéros de* g.

Proof. Soit $a < b$ deux zéros consécutifs de g. On suppose par l'absurde que f ne s'annule pas sur $[a, b]$. Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer que f est strictement positive sur cet intervalle. De même on suppose que g est strictement positive sur $]a, b[$. En particulier $g'(a) > 0$ et $g'(b) < 0$. Considérons alors le wronskien $\phi = fg' - f'g$. ϕ est dérivable et $\phi' = fg'' - f''g = fg(p - q) \geq 0$. Or $\phi(a) \geq 0$ et $\phi(b) \leq 0$. Par croissance de ϕ il vient $\phi_{|[a,b]} = 0$. De là $\frac{g}{f}$ est constante sur $[a, b]$ et vaut 0 en a donc sur $[a, b]$. Absurde ! □

Exercise 2.10.7. *Trouver les fonctions deux fois dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) - 10f'(x) + 29f(x) = 0$$

Proof. Le discrimant du polynôme caractéristique vaut -16. Les racines du polynôme sont donc $\lambda_1 = 5 - 2i$ et $\lambda_2 = 5 + 2i$. Les solutions de l'équation sont donc □

Exercise 2.10.8. *Considérons l'équation différentielle $y'' + y = P$ où P est un polynôme. Montrer que cette équation admet une unique solution polynômiale et expliciter cette solution. En déduire les solutions générales de l'équation.*

Proof. L'unicité vient de ce que $\phi : Q \to Q'' + Q$ est injective. On vérifie que $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x)$ est solution. La solution générale s'obtient en ajoutant la forme générale d'une solution à l'équation homogène.

Plus de détails :

Proof.

Unicité Il s'agit de prouver l'injectivité de $\phi : Q \mapsto Q + Q''$. On peut par exemple remarquer que ϕ est un endormorphisme de l'espace des polynôme $\mathbb{C}[X]$, et qu'il suffit donc de regarder son noyau. Un argument sur le degré permet de conclure.

Existence On veut ici trouver une solution explicite Q avec

$$Q + Q'' = P$$

Une approche peut consister comme suit. On commence par Q en fonction du reste. On écrit donc $Q = P - Q''$, et on cherche à se débarasser de Q''. En dérivant deux fois : $Q^{(2)} = P^{(2)} - Q^{(4)}$. Et on procède récursivement pour faire disparaître le terme en $Q^{(k)}$ à droite qui nous embête :

$$\begin{aligned} Q &= P - Q^{(2)} \\ &= P - P^{(2)} + Q^{(4)} \\ &= P - P^{(2)} + P^{(4)} - Q^{(6)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Cela fournit la solution explicitée plus haut. □

□

Exercise 2.10.9. *Résoudre l'équation différentielle $y''' - 3y'' + y' - 3y = 0$*

Proof. $z = y' - 3y$ vérifie $z'' + z = 0$. De là $z = A\cos(t) + B\sin(t)$. On résoud pour y à partir de là. □

Exercise 2.10.10. *Soit $y \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ une solution de l'équation (E) : $x^2y'' - y = x$. Montrer que $z = y(e^t)$ vérifie une certaine équation différentielle. En déduire la solution générale pour (E).*

Proof. $z' = e^t y'(e^t)$ puis

$$\begin{aligned} z'' &= e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t) \\ &= x^2 y''(x) + z' \\ &= e^t + z + z' \end{aligned}$$

Et la résolution pour z est classique. □

Exercise 2.10.11 (lemme de Gronwall)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *continues et soit* $A \geq 0$, *tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)dt$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \leq A \exp \int_0^x g(t)dt$$

Proof. On pose $F(t) = A + \int_0^x f(t)g(t)dt$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{f}{F} \leq 1 &\Rightarrow \frac{fg}{F} \leq g \\
&\Rightarrow \ln(F)' \leq g \\
&\Rightarrow \ln(F(x)) - \ln(F(0)) \leq \int_0^x g(t)dt \\
&\Rightarrow F(x) \leq A \int_0^x g(t)dt \\
&\Rightarrow f \leq A \int_0^x g(t)dt
\end{aligned}$$

□

Exercise 2.10.12. *Soit* $a, b \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues et* $(E)\ :\ y'' = ay' + by$, *et* y_0 *une solution non nulle de* (E).

1. *Montrer que les zéros de* y_0 *sont isolés.*
2. *Montrer que les zéros de* y_0 *sont en nombre fini sur tout segment.*
3. *Soit* y_1 *une solution de* (E). *Soit* $x_0 < x_1$ *deux zéros de* y_0. *Montrer que si* $y_1(x_0) = 0$, *alors* y_0 *et* y_1 *sont liés, et sinon* y_1 *s'annule sur* $]y_0, y_1[$.

Exercise 2.10.13. *Résoudre l'équation fonctionnelle suivante d'inconnue une fonction* f *dérivable.*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

Exercise 2.10.14. *Déterminer les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues telles que* $x \mapsto f(x) - \int_0^x tf(t)\, dt$ *est constante.*

Chapter 3

Commutative algebra

3.1 Groups

Exercise 3.1.1. *Montrer que les sous-groupes de* $(\mathbb{R}, +)$ *sont soit de la forme* $a\mathbb{Z}$*, avec* $a \in \mathbb{R}$*, soit denses dans* $\mathbb{R}$*.*
Application : montrer que $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*

Exercise 3.1.2. *Soit* G *un groupe, et* H, K *deux sous-groupes. Démontrer que* $H \cup K$ *est un sous-groupe de* G *si et seulement si* $H \subset K$ *ou* $K \subset H$*.*

Exercise 3.1.3. *Soit* H *un sous-groupe stricte de* G*. Déterminer le sous-groupe engendré par le complémentaire de* H*.*

Proof. Il existe $g \in G \setminus H$. Soit $h \in H$, on a $h = hg.g^{-1}$ où $hg \notin H$ et $g^{-1} \notin H$. □

Exercise 3.1.4. *Soit* G *un groupe abélien fini de cardinal* n *et soit* m *premier avec* m*. Montrer que* $x \mapsto x^m$ *est un isomorphisme de* G *dans* G*.*

Proof. C'est un morphisme. Il est injectif car $x^m = 1 \Rightarrow ord(x)|m$, et puisqu'on a toujours $ord(x)|n$, $x = 1_G$. G étant fini, il est bijectif. □

Exercise 3.1.5. *Soit* G *un groupe fini, et* $x, y \in G$*. Montrer que* xy *et* yx *ont même ordre.*

Proof. $(xy)^n = 1 \Leftrightarrow x^{-1}(xy)^n x = 1 \Leftrightarrow (yx)^n = 1$. □

Exercise 3.1.6. *Soit* G *muni d'une loi de composition interne associative qui possède un neutre à droite* e *(i.e.* $\forall g \in G,\ g.e = g$*) et tel que tout élément* g *possède un inverse à droite* g' *(i.e.* $gg' = e$*). Montrer que* G *est un groupe.*

Proof. Soit $g \in G$, g' son inverse à droite. On veut montrer $g'g = e$. Soit h l'inverse à droite de $g'g$. On écrit

$$\begin{aligned} g.(g'g).h &= g \\ e.g.h &= g \\ g'.g.h &= g'.g \\ e &= g'.g \end{aligned}$$

Cela fournit par ailleurs que e est un neutre à gauche puisque

$$e.g = g.g^{-1}.e.g = g.(g^{-1}.g) = g.e = g$$

□

Exercise 3.1.7. *Montrer que* $(\mathbb{R}^*, .)$ *et* $(\mathbb{C}^*, .)$ *ne sont pas isomorphes.*

Proof. Impossible car tout complexe admet une racine donc un morphisme de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R}^*$ ne prend pas de valeurs négatives. □

Exercise 3.1.8. *Montrer que les groupes suivant ne sont pas isomorphes :* $(\mathbb{Z}, +)$*,* $(\mathbb{Q}, +)$*,* $(\mathbb{Q}_+^*, .)$

Proof. $\mathbb{Z}$ est monogène, pas les autres. Tout élément de $(\mathbb{Q}, +)$ admet une moitié, pas les autres. □

Exercise 3.1.9. *Soit* A, B *deux parties d'un groupe fini* G*, telles que* $|A| + |B| > |G|$*. Montrer que* $AB = G$

Proof. $a \mapsto a^{-1}g$ est injectif donc atteint B sur A. □

Exercise 3.1.10. *Soit* G *un groupe fini de cardinal pair. Montrer que* G *admet un élément d'ordre 2.*

Proof. On considère la relation $\equiv$ d'équivalence sur G définie par

$$x \equiv y \Leftrightarrow x \in \{y, y^{-1}\}$$

et soit $(x_i)_{i\in I}$ un ensemble de représentants des classes d'équivalence de $\equiv$. Alors d'une part $\forall i, |\overline{x_i}| \leq 2$ et

$$\sum_{i\in I} |\overline{x_i}| = |G|$$

est pair. Or $|\overline{1_G}| = 1$ donc il existe un autre élément, soit g tel que $|\overline{g}| = 1$, i.e. $g = g^{-1}$ soit $g^2 = 1_G$. □

Exercise 3.1.11. *Montrer que* G *est fini si et seulement si* G *n'a qu'un nombre fini de sous-groupes.*

Proof. Seule le sens retour mérite preuve. Soit $a \in G$, si $< a >$ est infini, $< a >$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ qui admet un nombre infini de sous-groupes. Par contraposée, $< a >$ est fini. Puis on écrit $G = \bigcup_{g\in G} < g >$ et comme par hypothèse seul un nombre fini de ces sous-groupes sont distincts, on a écrit G comme union finie d'ensembles finis. Finalement G est fini. □

Exercise 3.1.12. *Que peut-on dire d'un groupe dont les seuls sous groupes sont triviaux ?*

Proof. Soit $g \in G \setminus \{e\}$. $\langle g\rangle$ est fini, sinon il est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ qui possède des sous-groupes non triviaux. Comme les seuls sous-groupes sont triviaux, $G = \langle g\rangle$ est fini. Puis $|G|$ est premier, sinon il existe des sous-groupes non triviaux. □

Exercise 3.1.13. *Soit* G *un groupe,* H, K *des sous-groupes de* G*. Montrer que* HK *est un sous-groupe si et seulement si* $HK = KH$*.*

Proof. Sens direct Soit x un élément de HK. On a $x^{-1} = hk$ donc $x = k^{-1}h^{-1} \in KH$. Pareil pour l'inclusion inverse.
Sens retour Soit $h_1.k_1, h_2.k_2 \in HK$. On a $k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in KH$ donc $k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h'k'$. De là $h_1k_1(h_2k_2)^{-1} = hh'k' \in HK$. □

Exercise 3.1.14. *Trouver le plus petit n tel qu'il existe un groupe de cardinal n non abélien.*

Proof. Pour $n = 1$, le groupe est trivialement abélien. Pour $n = 2, 3, 5$, il est cyclique donc abélien. Pour $n = 4$, il est soit cyclique donc abélien, soit tous les éléments sont d'ordre 2 auquel cas il est abélien (classique). Pour $n = 6$, il a $\mathcal{S}_3$ qui n'est pas abélien. □

Exercise 3.1.15 (label = théorème de Lagrange)**.** *Soit $(G, \cdot)$ un groupe et H un sous-groupe de G.*

1. *Montrer que pour tout $a \in G$, $|aH| = |H|$.*
2. *Soit $a, b \in G$. Montrer que $aH = bH$ ou bien $aH \cap bH = \emptyset$.*
3. *En déduire que $|H|$ divise $|G|$ (Lagrange).*

Proof.

1. $g \to ag$ est injectif.
2. S'il existe $h_1, h_2 \in H$ tels que $ah_1 = bh_2$ alors $a(h_1h_2^{-1})H = H$. Cela conclut car $(h_1h_2^{-1}H) = H$.
3. Soit $n = |G|, m = |H|$. On écrit $G = \bigcup_{g\in G} gH$. D'après la question précédente on peut "retirer les doublons" pour obtenir une union disjoinste : $\exists g_1, \ldots, g_k,\ G = \bigsqcup g_kH$, d'où $n = km$

□

Exercise 3.1.16. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On note pour $a \in G$, $\tau_a : g \mapsto aga^{-1}$. Montrer que $\{\tau_a | a \in G\}$ muni de la composition a une structure de groupe.*

Exercise 3.1.17. *Soit G un groupe commutatif de cardinal pq, où p et q sont premiers distincts. Montrer que G est cyclique.*

Proof. Soit $g \in G,\ g \neq 1_G$. Par Lagrange $| < g > | \in \{p, q, pq\}$. Si $| < g > | = pq$, G est cyclique. Sinon par exemple $| < g > | = p$. Il suffit de trouver un élément g' d'ordre q. On peut conclure facilement avec les groupes quotients, essayons de s'en passer. On définit la relation d'équivalence $x \equiv y$ si et seulement si $\exists h \in < g >,\ x = hy$. Chaque classe d'équivalence est de cardinal p, il y a donc q classes d'équivalence et on peut naturellement définir une structure de groupe sur les classes d'équivalence, et ce groupe est de cardinal premier donc cyclique, engendré par $\overline{g'}$. Ainsi q divise l'ordre de g'. Si cet ordre est pq, $G =< g' >$ est cyclique, sinon cet ordre est q et $G =< gg' >$ est cyclique. □

3.2 The symmetric group $\mathcal{S}_n$

Exercise 3.2.1. *Montrer que la famille des transpositions de la forme $(ii+1)$ engendre $\mathcal{S}_n$.*

Proof. $(jj+1)\cdot(ij)\cdot(jj+1) = (ij+1)$ ce qui permet de montrer, après une récurrence évidente, que la famille engendre toutes les transpositions, et donc $\mathcal{S}_n$ □

Exercise 3.2.2. *Montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles de $\mathcal{S}_n$.*

Proof. On observe que $(a_1\ a_2\ a_3)\circ(a_2\ a_3\ a_4) = (a_1\ a_2)\circ(a_3\ a_4)$. Puis $(a_1\ a_2)\circ(a_2\ a_3) = (a_1\ a_2\ a_3)$. Notons $\mathcal{B}_n$ le groupe engendré par les trois cycles. Alors pour tout $b\in\mathcal{B}_n$, $\varepsilon(b)=1$ donc $\mathcal{B}_n\subset\mathcal{A}_n$. Si $a\in\mathcal{A}_n$, on décompose a comme produit de transpositions. En évaluant la signature de a, il vient qu'il y a un nombre pair de ces transpositions, on peut donc les regrouper deux par deux. D'après l'observation initiale, a se décompose en produit de 3-cycles. Cela conclut. □

Exercise 3.2.3. *Trouver tous les morphismes de groupe de $(\mathcal{S}_n,\circ)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.*

Proof. Soit μ un tel morphisme. Alors pour toute transposition $(i\ j)$, $\mu^2(i\ j)=1$ donc l'image des transpositions par μ est dans $\{-1,1\}$ et puisque les transpositions engendrent le groupe symétrique, μ est un morphisme dans $(\{-1,1\},\times)$. S'il vaut 1 sur les transpositions, il est trivial. Sinon par exemple $f(1\ 2)=-1$. Alors pour tout $i\in[\![3,n]\!]$, on a $f(1\ 2\ i)^3 = f(Id) = 1 = f((1\ i)\circ(1\ 2))^3 = -1\times f(1\ i)^3$ donc $f(1\ i)=-1$ puis avec le même raisonnement, pour tout j, $f(i\ j)=-1$. Ainsi μ et le morphisme signature ε coïncident sur une partie qui engendre le groupe, donc sont égaux. Finalement les deux seuls morphismes de $(\mathcal{S}_n,\circ)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$ sont l'identité et la signature. □

Exercise 3.2.4. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer le nombre moyen de points fixes des permutations de $\mathcal{S}_n$.*

Proof. Soit m ce nombre. On écrit

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{i=\sigma(i)}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\mathbb{1}_{i=\sigma(i)}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}(n-1)!\\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Exercise 3.2.5. *Montrer que les permutations de $\mathcal{S}_n$ qui commutent avec $\sigma=(1\ 2\ \dots\ n)$ sont les puissances de σ.*

Proof. Soit τ qui commute avec σ. On a $(\tau(1)\ \tau(2)\ \dots\ \tau(n)) = \tau\circ\sigma\circ\tau^{-1} = (1\ 2\ \dots\ n)$. Soit $i=\tau^{-1}(1)$. On a donc pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\tau(i+k)=1+k$, donc $\tau=\sigma^{i-1}$. □

Exercise 3.2.6. *Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on définit l'orbite d'un élément $i \in [\![1, n]\!]$ comme étant*

$$\{\sigma^k(i) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

On note $o(\sigma)$ le nombre d'orbites distinctes de σ. Exprimer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de $o(\sigma)$.

Proof. On décompose en cycles à supports disjoints. On trouve $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-o(\sigma)}$. □

Exercise 3.2.7. *Pour chacune des décompositions suivantes, calculer leur puissance 2018.*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 3 & 9 & 10 & 8 & 5 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 10 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & 3 & 9 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Proof. Simple décomposition en cycles à supports dijoints. □

Exercise 3.2.8. *Soit $\sigma = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_p)$ un cycle de $\mathcal{S}_n$ et $\tau \in \mathcal{S}_n$. Exprimer $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$.*

Proof. Il s'agit de $(\tau(i_1), \tau(i_2), \ldots, \tau(i_p))$. □

Exercise 3.2.9. *Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par $(1\ 2)$ et $(1\ 2\ \ldots\ n)$.*

Proof. Notons $\sigma = (1\ 2)$ et $\tau = (1\ 2\ \ldots\ n)$. Les $\tau^n \circ \sigma \circ \tau^{-n}$ génèrent les $(i, i+1)$. Puis on génère $(1, i+1) = (i, i+1)(1, i)(i, i+1)$. Enfin on génère $(i, j) = (1, j)(1, i)(1, j)$, donc toutes les transpositions, donc le groupe. □

3.3 Rings

Exercise 3.3.1. *L'anneau des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est il intègre ?*

Proof. Non avec $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$. □

Exercise 3.3.2. *Soit A un anneau commutatif, et x, y des nilpotents de A.*

1. *Montrer que xy est nilpotent.*
2. *Montrer que $x + y$ est nilpotent.*
3. *Montrer que $1 - x$ est inversible.*
4. *On ne suppose plus A commutatif. Montrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est également.*

Proof. $x^n = y^m = 0$

1. $(xy)^{\max(n,m)} = 0$
2. $(x + y)^{n+m} = 0$ en écrivant la formule du binôme.

3. $1 - a^p = (1-a)(\sum_{k=0}^{(} p-1)a^k)$
4. Si $(xy)^n = 0$ alors $(yx)^{n+1} = 0$.

$\square$

Exercise 3.3.3. *Soit A un anneau. Montrer que le centre $C(A)$ de A, composé des éléments de A qui commutent avec tout le monde, est un sous-anneau de A.*

Exercise 3.3.4. *On appelle ensemble des entiers de Gauss, noté $\mathbb{Z}[i]$, l'ensemble des complexes de la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.*

1. *Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau.*
2. *Soit $N : z \to z\bar{z}$*
   (a) *Montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$.*
   (b) *Montrer que pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) \in \mathbb{N}$.*
   (c) *En déduire l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.*

Exercise 3.3.5. *Soit A, B deux anneaux commutatifs, et f une application de A vers B qui préserve la somme, le carré et l'unité. On suppose de plus 2 régulier dans B. Montrer que f est un morphisme d'anneau. Trouver un contre-exemple si on ne suppose plus que f préserve l'unité.*

Proof. Il suffit de montrer quer f préserve le produit. On prend $x, y \in A$. En écrivant $2xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2$, on montre $2f(x)f(y) = 2f(xy)$ et on utilise la régularité de 2. Pour le contre-exemple remarquons que $f(1)$ est toujours idempotent. Il faut donc se placer dans un anneau qui admet d'autre idempotent que 1 et 0, par exemple dans un anneau produit (prendre par exemple $\phi : A \to B$ un morphisme et $f : A \to B^2$ défini par $f(a) = (\phi(a), 0)$). $\square$

Exercise 3.3.6. *Soit A un anneau commutatif. Montrer que A possède un idempotent différent de 0 et 1 si et seulement si A est isomorphe à un anneau produit $B \times C$ avec B et C des anneaux non nuls.*

Proof. Le sens retour est trivial. Considérons b différent de 0 et de 1 un idempotent de A, et notons $c = 1 - b$. c est également idempotent non trivial. Notons $B = Id(b)$ et $C = Id(c)$ et considérons le morphisme

$$\phi : \begin{cases} A & \to B \times C \\ x & \mapsto (bx, cx) \end{cases}$$

ϕ est clairement un morphisme et est bijectif de réciproque la somme. On peut munir B et C d'une structure d'anneau. Pour B par exemple, il suffit de considérer que l'unité est b. $\square$

Exercise 3.3.7. *Soit A un anneau intègre fini. Montrer que A est un corps.*

Proof. Soit $a \in A \setminus \{0\}$. Le morphisme $x \mapsto ax$ est injectif donc bijectif donc il existe un inverse b à droite de a. De même il existe un inverse c à gauche de a. Puis $1 = ca = c(ab)a = (ca)(ba) = ba$ donc $b = c$ et A est un corps. $\square$

Exercise 3.3.8. *Soit A un anneau dont les seuls idéaux sont les idéaux triviaux. Montrer que A est un corps.*

Proof. Pour $a \in A \setminus \{0\}$ on a $Id(a) = A$ donc $1 \in Id(a)$ donc a est inversible à gauche, à droite et avec le même raisonnement que dans l'exercice 3.3.7, ce sont les mêmes inverses. □

Exercise 3.3.9. *Soit A un anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers. Montrer que A est un corps.*

Proof. Soit $x \in A$. On regarde $Id(x^2)$ qui contient x^2 donc x, donc on peut écrire $x = x^2a$ pour un certain$a$, puis $x(1 - xa) = 0$. Il reste à remarquer que $\{0\}$ est premier, donc A est intègre. Ainsi $1 = ax$. □

Exercise 3.3.10. *Soit A un anneau intègre possèdant un nombre fini d'idéaux. Montrer que A un est un corps.*

Proof. Pour $a \in A \setminus \{0\}$ on regarde les idéaux $I_n = a^nA$ qui forment une suite décroissante. Elle est donc stationnaire d'où l'existence de $m \in \mathbb{N}$ tel que $I_{m+1} = I_m$. De là il existe $x \in A$ tel que $a^{m+1}x = a^m$. Par intégrité, x est inverse à droite de a. De même il existe un innverse à gauche et la conclusion suit. □

Exercise 3.3.11. *Soit I_n une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K}$ est un corps. Montrer que (I_n) est stationnaire.*

Proof. Facile quand on utilise le fait que $I_n = Id(P_n)$ pour un certain $P_n \in I_n$. La suite $deg(P_n)$ est alors décroissante donc stationnaire. □

Exercise 3.3.12. *Soit A un anneau de Boole, i.e. $\forall a \in A,\ a^2 = a$. Montrer que A est commutatif. Indication : montrer que $\forall a \in A,\ a = -a$.*

Proof. On a pour $a \in A$, $(a + a) = (a + a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a + a + a + a$ donc $a + a = 0$ soit $a = -a$. Puis pour $x, y \in A$, on regarde $(x + y)^2$. La conclusion suit facilement. □

Exercise 3.3.13. *Montrer que si I est maximal, alors I est premier.*

Proof. Soit $x, y \in A$ tels que. On suppose $x \notin I$. On regarde l'idéal $J = I + Id(x)$ qui par maximalité de I est égal à A. Il existe donc $i \in I, u \in A$ tels que $1 = i + ux$. De là $y = iy + uxy$. Mais $iy \in I$ et $uxy \in I$ donc $y \in I$. □

Exercise 3.3.14.

1. *Soit A un anneau, u une unité de A et n un nilpotent qui commute avec u. Montrer que $u+n$ est encore une unité.*

2. *Soit a, b deux éléments de A tel que $1 - ab$ soit inversible. Montrer que $1 - ba$ est inversible.*

Proof.

1. Intuition : $\frac{1}{1-x} = \sum x^k$. Déjà remarquer que $\frac{n}{u}$ est nilpotent, donc on peut se permettre de faire l'exercice pour simplement $u = 1$. Avec l'intuition, on montre alors facilement que $\sum_{k \leq \mathcal{N}(n)} (-n)^k$ est bien l'inverse cherché (attention à montrer qu'il est inverse des deux côtés).

2. Pareil avec l'intuition, il faut regarder $1+b\frac{1}{1-ab}a$ et vérifier qu'il s'agit bien de l'inverse cherché (des deux côtés !).

$\square$

Exercise 3.3.15. *Soit A un anneau, et $a \in A$.*

1. *Montrer que l'ensemble des inverses à gauche de a est en bijection avec $Ker(\cdot a)$ (noyau de l'homothétie).*
2. *On suppose $Ker(\cdot a)$ fini non vide. Soit κ dans $Ker(\cdot a)$. Montrer qu'il existe $m > 0$, tel que $\kappa = g^m\kappa$. Indication : considérer $(a^n\kappa)$.*
3. *Montrer que $1 - ag \in Ker(g\cdot) \cap Ker(\cdot a)$.*
4. *En déduire que a admet 0, 1 ou une infinité d'inverses à gauche.*

Proof.

1. On fixe g_0 inverse à gauche de a (traiter le cas sans inverse à gauche séparément). On a $ga = 1 \Leftrightarrow ga = g_0a \Leftrightarrow (g - g_0)a = 0 \Leftrightarrow g \in g_0 + Ker(\cdot a)$.
2. $(a^n\kappa)$ n'est pas injective.
3. Simple vérification
4. Il suffit de montrer le résultat sur $Ker(\cdot a)$. On le suppose non vide de taille fini. Alors avec les questions précédentes $Ker(g\cdot) \cap Ker(\cdot a) = \{0\}$ donc $ag = 1$ donc g est l'unique inverse de a.

$\square$

3.4 Polynomials

Exercise 3.4.1. *Un idéal I d'un anneau $(A, +, \times)$ est un sous-groupe pour l'addition qui est absorbant pour la multiplication : $\forall a \in A, aI \subset I$. Un idéal est principal s'il est engendré par un unique élément*

$$I =< a >= aA$$

Un anneau est principal si tous ses idéaux sont principaux.
Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est principal.

Proof. On exhibe un polynôme de l'idéal de degré positif minimal, et on montre qu'il divise les autres éléments de l'idéal à l'aide d'une division euclidenne. $\square$

Exercise 3.4.2. *Montrer que les fonctions trigonométriques ne sont pas des polynômes*

Proof. On dérive pour cos et sin, et on regarde l'équation $\tan^2 = 1 + \tan'$ pour tan. $\square$

Exercise 3.4.3. *Montrer que le polynôme $\sum_{k=0}^{2n} \frac{X^k}{k!}$ n'admet pas de racine réelle.*

Proof. P tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ donc P atteint son inf, mettons en a. On a aussi $P = P' + \frac{X^2n}{(2n)!}$ d'où $P(a) = \frac{a^{2n}}{(2n!)}$ qui est strictement positif, sauf si $a = 0$, cas que l'on peut rejeter à la main. Remarque : l'idée de dériver est naturelle par analogie avec l'exponentielle. □

Exercise 3.4.4. *Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Déterminer $P(\mathbb{C})$*

Proof. Si $deg(P) > 0$, le polynôme $P - z$ admet une racine complexe pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Sinon, $P(\mathbb{C}) = P(0)$. □

Exercise 3.4.5. *Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.*

Proof. On procède par analyse synthèse. On a r racine implique r^2 racine et $(r-1)^2$ racine. On suppose P non nul. Cela amène à trouver les E ensembles finis stables par $x \mapsto x^2$ et par $x \mapsto (x-1)^2$. Soit un tel E. On a $\forall z \in E,\ |z| \in \{0,1\}$. Puis en regardant $|z-1|^2$ pour $z \neq 0, z \neq 1$, on montre que $E \subset \{0, 1, -j, -\bar{j}\}$. La stabilité par carré impose $E \subset \{0,1\}$. À partir de là la synthèse est facile et on trouve $0, 1, X^n(X-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. □

Exercise 3.4.6 (Gauss-Lucas)**.** *Montrer que les racines de la dérivée d'un polynôme sont comprises dans l'enveloppe convexe des racines de ce polynôme. Conséquence : Soit P polynôme dont un des coefficients est nuls. Montrer que 0 appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.*

Proof. On dérive $\log(P)$. Pour la conséquence, 0 est racine de la dérivée k-ième dont les racines sont incluses dans l'enveloppe convexe de P par Gauss-Lucas itéré. □

Exercise 3.4.7 (Régionnement)**.** *Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$. Montrer que*

$$\max\{|z|,\ z \in Z(P)\} \leq 1 + \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|$$

Conséquence : Soit $(P_k) \in \mathbb{C}_n[X]$ une suite de polynômes unitaires à coefficients bornés par M. Montrer qu'il existe une extractrice ϕ telle que $Z(P_{\phi(k)})$ converge.

Proof. On pose $\mu = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|$. Soit $z \in Z(P)$. On a $|z|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z_k| \leq \mu \frac{|z|^n - 1}{|z|-1}$ si $|z| \neq 1$. Supposons $|z| > 1$ Il vient

$$|z|^n(|z|-1) \leq \mu(|z|^n - 1) \leq \mu|z|^n$$

Et de là le résultat. La conséquence est immédiate. □

Exercise 3.4.8. *Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $1+\sqrt{2}$ soit une racine de P. Calculer $P(1-\sqrt{2})$.*

Proof. On regarde le polynôme minimal de l'idéal des polynôme qui s'annulent en $1+\sqrt{2}$. □

Exercise 3.4.9. *Soit F une partie fermée de $\mathbb{C}$ et $P_k = X^n + a_{n-1,k}X^{n-1} + \ldots + a_{0,k}$ une suite de polynôme tels que*

$$\begin{cases} a_{l,k} \to a_l \\ Z(P_k) \subset F \end{cases}$$

On note $P = \sum_{l=0}^{n} a_l X^l$. Montrer que $Z(P) \subset F$.

Proof. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus F$. On a pour tout k,

$$|P_k(a)| = \prod_{j=1}^{n} |a - z_{j,k}| \geq d(a,F)^n > 0$$

À la limite, $|P(a)| \geq d(a,F)^n > 0$. □

Exercise 3.4.10. *Montrer que tout polynôme positif sur $\mathbb{R}$ est somme de deux carrés.*

Proof. D'abord on remarque que l'ensemble des polynômes sommes de deux carrés est stable par produit (cf exercice de complexes). Puis si $P = X^2 + 2aX + b$ est irréductible, on a $a^2 - b < 0$. De là $P = (X+a)^2 + (\sqrt{b-a^2})^2$. Puis si P admet x pour racine, $P \sim_x \lambda(X-x)^\alpha$. Il vient $\lambda > 0$ et α pair. Cela conclut. □

Exercise 3.4.11. *Déterminer les polynômes P tels que P' divise P.*

Proof. Ok avec d'Alembert Gauss. Sinon on explicite la relation $P = QP'$ de divisibilité et on dérive k fois pour k plus petit que n et on évalue en la racine de Q. Ou encore avec les fractions rationnelles et en regardant $\frac{P'}{P}$, P a une seule racine. □

Exercise 3.4.12. *Soit P un polynôme tel que les restes de la division euclidienne de P par $(X-1)$, $(X-2)$ et $(X-3)$ soient 3, 7 et 13 respectivement. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.*

Proof. Ce reste R est de degré au plus 2 et coïncide avec l'interpolateur de Lagrange associé à $(1,3),(2,7),(3,13)$ en 3 points, donc ces deux polynômes sont égaux. □

Exercise 3.4.13. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \in \mathbb{R}$. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$.*

Proof. Par exemple avec un polynôme interpolateur de Lagrange sur $deg(P)+1$ points réels. Ou sinon avec le polynôme $\bar{P}$ □

Exercise 3.4.14. *Déterminer $m > 0$ tel que le polynôme $X^4 - (3m+2)X^2 + m^2$ ait ses racines en progression arithmétique.*

Proof. P est pair donc ses racines sont réparties autour de 0. Ainsi il existe $a > 0$ tel que $-3a, -a, a, 3a$ sont les racines de P. Ainsi $P = (X^2 - 9a^2)(X^2 - a^2) = X^4 - 10a^2 + 9a^4$. On a donc

$$\begin{cases} 10a^2 & = 3m+2 \\ 9a^4 & = m^2 \end{cases}$$

De là $m = 3a^2$ puis $a = \sqrt{2}$, ce qui correspond à $m = 6$. □

Exercise 3.4.15. *Résoudre l'équation $4P = (X-1)P' + P''$.*

Proof. Soi tn le degré de P. On écrit $P = a_n X^n + Q$ avec $deg(Q < n)$. En réinjectant dans l'équation on a

$$4a_n X^n - na_n X^n + R = 0$$

avec $deg(R) < n$, d'où $n = 4$. Ensuite après dérivations successives de l'équation et évaluation en 1, on obtient $4P(1) = P''(1)$, $3P'(1) = P^{(3)}(1)$, $2P''(1) = P^{(4)}(1)$ et $P^{(3)}(1) = P^{(5)}(1) = 0$, d'où $P'(1) = 0$. On effectue un développement de Taylor en 1 pour obtenir

$$P(X) = P(1)\left(1 + 2(X-1)^2 + \frac{1}{3}(X-1)^4\right)$$

On vérifie que tous les polynômes de cette forme conviennent. □

Exercise 3.4.16. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\Im(z)|^{deg(P)}$$

Proof. $(\Rightarrow)$ On écrit $P = \prod(X - a_i)$, avec $a_i \in \mathbb{R}$. On évalue en $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} |P(z)| &= \prod |(x - a_i) + iy| \\ &\geq \prod |y| = |\Im(z)|^{deg(P)} \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Si P admet une racine non réelle, on a une contradiction en évaluant en cette racine. On conclut avec D'Alembert-Gauss. □

Exercise 3.4.17. *Soit P un polynôme de degré n tel que $\forall k \in \{\,0, 1, \dots, n\},\ P(k) = \frac{k}{k+1}$. Calculer $P(n+1)$.*

Proof. On regarde $Q = (X+1)P - X$, de degré $n+1$ et nul en $0, 1, \dots, n$. Il vient $Q = a\prod_{i=0}^{n}(X-i)$. Mais $Q(-1) = 1$ donc $a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. De là $P(n+1) = \frac{n+1+Q(n+1)}{n+2} = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}$ □

Exercise 3.4.18. *Déterminer les P tels que*

$$P(\cos(t)) + P(\sin(t)) = 1$$

Proof. En remplaçant t par $-t$, il vient que $P(X)$ et $(P - X)$ coïncident sur une infinité de valeurs, donc P est pair. Ainsi P s'écrit comme un polynômr en X^2, notons le Q, qui vérifie

$$Q(\cos^2(t)) + Q(\sin^2(t)) = 1$$

donc $Q(X) + Q(1 - X) = 1$. Ainsi, $R = Q(X + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$ est impair (penser au centre de symétrie du graphe de Q). On peut donc écrire $R = XU(X^2)$.

Réciproquement ça marche (mais il reste un peu de calcul). □

Exercise 3.4.19. *Soit f une fonction localement polynomiale, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0, P_x \in \mathbb{R}[X]$, $f = P_x$ sur $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Montrer que f est un polynôme.*

Proof. Si elle ne l'est pas, soit $s = \inf\{x > 0 \mid f(x) \neq \mathcal{P}_0(x)\}$. Par hypothèse, $s > 0$. Or P_s et P_0 coïncident sur un intervalle, donc $P_s = P_0$, donc s n'est pas l'infinimum. Remarque : avec le théorème de Baire, l'hypothèse plus faible $\forall x, \exists n, f^{(n)}(x) = 0$ suffit. □

3.5 Rational fractions

Un résultat important : si P est à racines simples (notons les (x_i)), $Q \wedge P = 1$ et $deg(Q) < deg(P)$, alors

$$\frac{Q}{P} = \sum_{x_k} \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)} \frac{1}{X - x_k}$$

Exercise 3.5.1. *Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes.*

1. $F_1 = \frac{1}{X^n - 1}$ *dans* $\mathbb{C}[X]$
2. $F_2 = \frac{n!}{(X-1)(X-2)...(X-n)}$ *dans* $\mathbb{R}[X]$.
3. $F_3 = \frac{1}{X^{2n}+1}$ *dans* $\mathbb{C}[X]$ *puis* $\mathbb{R}[X]$
4. $F_4 = \frac{X+1}{X^8(X+2)}$
5. $F_5 = \frac{X^2}{(X^2-1)^2}$

Proof.

1. Notons $w_1, \dots, w_n$ les racines n-ième de l'unité. On a donc $F_1 = \sum \frac{a_k}{X - w_k}$. $X^n - 1$ étant à racines simples, on $a_k = \frac{1}{P'(w_k)} = \frac{w_k}{n}$. D'où

$$F_1 = \frac{1}{n} \sum \frac{w_k}{X - w_k}$$

2. On a donc $F_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X-k}$ Et on évalue :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{n!}{(k-1)! \times (-1)^{n-k}(n-k)!} \\ &= (-1)^{n-k} n \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

d'où

$$F_2 = n(-1)^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n-1}{k-1}}{X - k}$$

3. Notons $w = e^{\frac{i\pi}{2n}}$, un pôle de F_3. Notons $w_0, \dots, w_{2n-1}$ les racines $2n$-ièmes de l'unité. Il vients que les $\nu_k = w w_k = e^{i\pi\frac{2k+1}{2n}}$ sont les pôles de F_3 dans $\mathbb{C}$, puis

$$F_3 = -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\nu_k}{X - \nu_k}$$

est la DES dans $\mathbb{C}$ de F_3. Puis en associant ν_k et ν_{2n-1-k} on trouve la DES dans $\mathbb{R}$: $F_3 = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k X + b_k}{X^2 - 2\cos\frac{2k+1}{2n}\pi + 1}$ où $a_k X + b_k = (X - \nu_k)\nu_{2n-1-k} + (X - \nu_{2n-1-k})\nu_k$ d'où $a_k = 2\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$ et $b_k = -2$ soit

$$F_3 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{-\cos\frac{2k+1}{2n}\pi X + 1}{X^2 - 2\cos\frac{2k+1}{2n}\pi + 1}$$

4. On effectue un DL en 0 de $\frac{x+1}{x+2}$:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x+2} &\underset{0}{=} \frac{1}{2}(x+1)(\sum_{k=0}^{8}(-1)^k(\frac{x}{2})^k + o(x^8)) \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{8}(-1)^k(\frac{x}{2})^k\end{aligned}$$

   On en déduit un DL de F_4 puis on identifie les termes de la DES et du DL.

5. On écrit

$$F_5 = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}$$

   Mais F_5 est paire, cela amène en remplaçant X par $-X$:

$$\begin{cases} a &= -c \\ b &= d \end{cases}$$

   On évalue en 0 pour obtenir l'équation supplémentaire $a = b$, puis en 1 pour obtenir $b = \frac{1}{4}$. Cela fournit la DES.

□

Exercise 3.5.2. *Calculer la dérivée n-ième de*

$$F = \frac{1}{X^2+1}$$

Proof. On décompose

$$F = \frac{-i}{2(X-i)} + \frac{i}{2(X+i)}$$

Puis la dérivé n-ième de $\frac{1}{X+a}$ est $\frac{(-1)^n n!}{(X+a)^{n+1}}$. De là

$$F^{(n)} = \frac{in!}{2}(-1)^n \left(\frac{1}{(X+i)^{n+1}} - \frac{1}{(X-i)^{n+1}} \right)$$

On peut simplifier en remarquant que les coefficient de cette dérivée doivent être réels, et donc on peut prendre la partie imaginaire du gros machin. □

Exercise 3.5.3. *Soit P, Q non nuls, premiers entre eux. Montrer que $F = \frac{P}{Q}$ est paire si et seulement si P et Q sont pairs. Établir un résultat équivalent pour F impaire.*

Proof. P divise $P(X)Q(-X) = P(-X)Q(X)$ donc par Gauss divise $P(-X)$. De même $P(-X)$ divise $Q(X)$. Ainsi $P(X) = \lambda P(-X)$. L'analyse des coefficients amène $\lambda = (-1)^n$. Pareil pour Q. Ainsi P et Q sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Le cas impair est exclu car alors 0 est racine à la fois de P et Q.

Le résultat à établir ensuite est F impaire si et seulement si P pair, Q impair, ou bien P impair, Q pair. □

Exercise 3.5.4. *Soit* $x_1, , \ldots, x_n$ *des complexes distincts et*

$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

. Calculer

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}$$

Proof. On regarde la fraction rationnelle $F = \frac{P''}{P}$. Sa DES est donnée par

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} \frac{1}{X - x_k}$$

De là $xF(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} S$. Or $XP''(X)$ est de degré strictement inférieur à celui de P donc $XF \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. De là $S = 0$. □

Exercise 3.5.5. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *unitaire de degré* n*, et* $Q = \prod_{k=0}^{n}(X - k)$*. Calculer* $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{\prod_{i\neq k}(k-i)}$ *et en déduire l'existence d'un* $k \in [\![0, n]\!]$ *tel que* $|P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}$*.*

Proof. DES de $\frac{P}{Q}$ pour en déduire $S = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xP}{Q} = 1$. Puis si aucun k ne vérifie l'inégalité, $S < \frac{1}{2^n} \sum \frac{n!}{k!(n-k)!} = 1$. □

Exercise 3.5.6 (théorème de Gauss-Lucas)**.**

1. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$ *non constant. Montrer que les racines de* P' *appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de* P*.*
2. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$ *non constant, et soit* H *un demi-plan de* $\mathbb{C}$ *tels que* $0 \in P'(H)$*. Montrer que* $P(H) = \mathbb{C}$*.*
3. *Retrouver le thèorème de D'Alembert-Gauss.*

Proof.

1. On considère la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$, de DES $\sum \frac{\alpha_k}{X - x_k}$, où les x_k sont les racines de P et α_k leur multiplicité. Soit x une racine de P' qui n'est pas aussi une racine de P. On écrit

$$0 = \sum_k \frac{\alpha_k}{x - x_k}$$
$$0 = \sum_k \overline{(x - x_k)} \frac{\alpha_k}{|x - x_k|^2}$$
$$0 = \sum_k (x - x_k) \frac{\alpha_k}{|x - x_k|^2}$$
$$x = \sum_k \frac{\lambda_k}{\sum_i \lambda_i} x_k$$

où les $\lambda_k = \frac{1}{|x - x_k|^2}$ sont compris entre 0 et 1.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère $P_z = P - z$. P_z vérifie les mêmes hypothèses que P. Si P_z ne s'annule pas sur H, alors l'enveloppe convexe des racines de P_z est incluse dans $\mathbb{C} \setminus H$ et donc les racines de P_z' le sont aussi. Cela étant exclu par hypothèse, P_z s'annule sur H, donc P atteint z sur H. Cela conclut.

3. Récurrence sur le degré. Le cas d'initialisation se fait à la main (et est, au passage, trivial).

□

3.6 Arithmetic

Exercise 3.6.1. *Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs n'est jamais un produit de deux nombres premiers.*

Proof. Si le premier est 2, on vérifie à la main. Sinon 2 divise la somme et $p_n + p_{n+1} = 2q$ donc $p_n < q < p_{n+1}$. Absurde. □

Exercise 3.6.2. *Montrer que* 2^n *divise* $(3-\sqrt{5})^n + (3+\sqrt{5})^n$.

Proof. On note $u_n = (3-\sqrt{5})^n + (3+\sqrt{5})^n$. Cette suite doit vérifier une relation de récurrence d'ordre 2 dont $(3-\sqrt{5})$ et $(3+\sqrt{5})$ sont les racines. Cette relation doit donc être $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 4u_n$. La récurrence est alors triviale. □

Exercise 3.6.3 (nombre de Mersène)**.** *Les nombres de Mersène sont les* $M_n = 2^n - 1$. *Montrer que* M_n *premier* $\Rightarrow n$ *premier.*

Proof. Corollaire de $a - b$ divise $a^n - b^n$, en prenant $a = 2^p$, $n = q$ et $b = 1$. □

Exercise 3.6.4. *Trouver* 1000 *nombres consécutifs non premiers.*

Proof. $1001! + k$ pour $k = 2, \ldots, 1001$. □

Exercise 3.6.5 (nombre harmonique non entier)**.** *Montrer que* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ *n'est pas entier.*

Proof. On montre par récurrence que sa valuation 2-adique est toujours strictement négative. $H_{n-1} = \frac{p_n}{2q_n}$ et $H_n = \frac{p_n}{2q_n} + \frac{1}{n} = \frac{np_n+2q_n}{2nq_n}$ et on est assuré que $v_2(np_n+2q_n) = \min(v_2(n), v_2(2q_n)) < v_2(2q_n) + v_2(n) = v_2(2nq_n)$. □

Exercise 3.6.6. *Montrer que la somme de* $n \geq 2$ *impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier.*

Proof. Cette somme s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2m + 2k + 1 = 2mn + n(n-1) + n$$

qui est divisible par n. □

Exercise 3.6.7. *Calculer le dernier chiffre de* $7^{\circ 7} = 7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$.

Proof. $7^4 = 1[10]$ puis $3^2 = 1[4]$ puis $7^{\circ 5} = 1 \mod 2$ donc $3^{7^{\circ 5}} = 3 \mod 4$ donc $7^{\circ 6} = 3 \mod 4$ donc $7^{\circ 7} = 7^3 \mod 10 = 3 \mod 10$. □

Exercise 3.6.8. *Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par* 9.

Exercise 3.6.9. *Montrer que* $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \neq 0 \mod 8$.

Exercise 3.6.10. *Montrer que pour tout* n*, il existe des uniques* a_n, b_n *tels que* $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$*. Calculer* $a_n^2 - 2b_n^2$*. En déduire que* a_n *et* b_n *sont premiers entre eux.*

Proof. Existence acquise, unicité par irrationnalité de $\sqrt{2}$. Puis en remarquant que $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$, il vient $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$. □

Exercise 3.6.11. *Soit* a, b *des entiers plus grands que* 2*. Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Montrer que si* $p = a^n + b^n$ *est premier, alors* n *est une puissance de* 2.

Proof. On écrit $n = 2^k(2q+1)$. On a alors $p = (a^{2^k})^{2q+1} - (-b^{2^k})^{2q+1}$, ce qui se factorise par $a^{2^k} + b^{2^k}$. □

Exercise 3.6.12. *Soit* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$*. Montrer qu'il existe* $J \subset [\![1, n]\!]$ *tel que* n *divise* $\sum_{j \in J} x_j$.

Proof. On se ramène dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On prend $J_1, \ldots, J_n$ une suite croissante pour l'inclusion d'indices. On leur associe leur n sommes correspondantes. Si l'une vaut 0, c'est bon, sinon deux ont la même valeur, et la différence convient. □

Exercise 3.6.13. *Montrer que* 13 *divise* $3^{126} + 5^{126}$

Proof. $3^3 = 1 \mod 13$ et $3|126$ donc $3^{126} = 1 \mod 13$. De même, $5^2 = -1 \mod 13$ et $126 = 1 \mod 2$ donc $5^{126} = -1 \mod 13$. □

Exercise 3.6.14. *Montrer que* 2012 *a un multiple qui ne s'écrit qu'avec des* 4.

Proof. $2012 = 503 \times 4$ et 503 est premier. Il faut montrer que 503 a un multiple qui ne s'écrit qu'avec des 1, soit qu'il existe m tel que $\frac{10^m - 1}{9} = 0 \mod 503$. Or $9 \wedge 503 = 1$ donc il faut m tel que $10^m = 1 \mod 503$. C'est Fermat ! □

Exercise 3.6.15. *Soit* (u_n) *la suite de Fibonacci.*

1. *Montrer que* $u_{n+m} = u_m u_{n+1} + u_{m-1} u_n$*. En déduire que si* $p|n$ *alors* $u_p|u_n$.
2. *Montrer que* $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$
3. *Montrer que* $u_{p \wedge n} = u_p \wedge u_n$

Proof.

1. À n fixé, on fait une récurrence sur m. On écrit

$$\begin{aligned}
u_{n+m+1} &= u_{n+m} + u_{n+m-1} \\
&= u_m u_{n+1} + u_{m-1} u_n + u_m u_n + u_{n-1} u_{m-1} \\
&= u_{m-1}(u_n + u_{n-1}) + u_m u_{n+1} + u_m u_n \\
&= u_{n+1}(u_m + u_{m-1}) + u_m u_n \\
&= u_{m+1} u_{n+1} + u_m u_n
\end{aligned}$$

Puis si $p|n$ on écrit $n = kp$. On a

$$u_{kp+p} = u_p u_{kp+1} + u_{p-1} u_{kp}$$

et ains par récurrence $u_p | u_n$

2. Récurrence:

$$\begin{aligned} u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 &= u_{n+1}u_n + u_n^2 - u_{n+1}u_n - u_{n+1}u_{n-1} \\ &= -(u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2) \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

3. Algorithme d'Euclide : il suffit de montrer que si $n = qp + r$, $u_p \wedge u_n = u_p \wedge u_r$. On écrit avec la question 1

$$u_{qp+r} = u_{qp+1}u_r + u_{qp}u_{r-1}$$

Or $u_p | u_{qp}$, et u_{qp+1} est premier avec u_{qp} d'après la question 2, donc avec u_p. Cela conclut.

□

Exercise 3.6.16. *Déterminer pour tout n la valuation 2-adique de $5^{2^n} - 1$.*

Proof. On a $5^{2^{n+1}} - 1 = (5^{2^n} - 1)(5^{2^n} + 1)$ donc

$$v_2(5^{2^{n+1}} - 1) = v_(5^{2^n} - 1) + v_(5^{2^n} + 1)$$

Puisque $v_(5^{2^n}+1) \geq 1$, on en déduit $v_2(5^{2^{n+1}}-1) \geq n+3$, d'où $v_(5^{2^n}+1) = 1$, et enfin $v_2(5^{2^{n+1}}-1) = n+3$ □

Exercise 3.6.17. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Caractériser les nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Exercise 3.6.18. *Trouver les solutions dans $\mathbb{Z}^3$ de $x^2 + y^2 = 3z^2$.*

Proof. On regarde dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et on montre qu'on peut diviser les solutions par 3, donc il n'y a que $(0, 0, 0)$. □

Exercise 3.6.19. *Montrer que $\phi(n) \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$.*

Proof. On note $q = \max(p_i^{\alpha_i})$. On a $\phi(n) \geq \frac{q}{2}$. Or à N fixé il n'y a qu'un nombre fini d'entiers n tels que $q \leq N$. □

Exercise 3.6.20. *Montrer que $\phi(n)$ est pair pour $n \geq 3$.*

Proof. -1 est d'ordre 2 et son ordre divise le cardinal de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. □

Exercise 3.6.21. *On suppose $m \wedge n = 1$. Montrer que*

$$m^{\phi(n)} + n^{\phi(n)} = 1 \mod mn$$

Proof. Par Euler c'est vrai modulo m et modulo n donc par le lemme chinois c'est vrai modulo mn. □

Exercise 3.6.22 (Wilson)**.** *Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que*

$$p \text{ premier } \Leftrightarrow (p-1)! + 1 = 0 \mod p$$

Proof. ($\Leftarrow$) Par Bezout p et $(p-1)!$ sont premiers entre eux.

($\Rightarrow$) On regarde $P = X^p - X$ dans $\mathbb{F}_p[X]$. Par raisonnement sur le degré ($\mathbb{F}_p$ est un corps) on a $P = \prod_{a \in \mathbb{F}_p}(X-a)$. Puis on identifie le coefficient devant X. $\square$

Exercise 3.6.23. *Soit $b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ avec p premier. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer*

$$S_k = \sum_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} a^k$$

Proof. pour $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a $a \mapsto ba$ bijective donc $S_k = b^k S_k$. Puis si k est multiple de $p-1$, $S_k = -1$ par Fermat. Sinon, il existe b tel que $b^k \neq 1$ (on écrit $k = qp + r$ et on a $b^k = b^r$ donc au plus r b qui ne conviennent pas). De là $S_k = 0$. $\square$

Exercise 3.6.24 (Résidus quadratiques)**.** *Soit $p \geq 3$ premier. On dit que $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est un carré s'il existe $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $a = b^2$.*

1. *Montrer qu'il y a $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.*
2. *Montrer que a est un carré si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$*
3. *En déduire que*
$$f_p \begin{cases} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})* \to & \{-1,1\} \\ x \mapsto & -1 \text{ si } x \text{ n'est pas un carré} \\ & 1 \text{ sinon} \end{cases}$$
est un morphisme. Culture : c'est le seul non trivial et on note $(\frac{a}{b}) = f_p(a)$. C'est le symbole de Legendre.

Exercise 3.6.25 (Suite résidus quadratiques)**.** *Soit p un nombre premier de la forme $2^m - 1$, avec $m \geq 3$.*

1. *Montrer que $p = 1 \mod 3$.*
2. *Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x^3 = 1 \mod p$ et $x \neq 1 \mod p$. En déduire que $x^2+x+1 = 0 \mod p$*
3. *Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, montrer que -1 n'est pas un carré. Puis à l'aide de la question précédente, montrer que -3 est un carré. En déduire que 3 n'est pas un carré.*

Exercise 3.6.26 (Formule de Legendre)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, p premier. Montrer que*

$$v_p(n!) = \sum_1^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$$

Exercise 3.6.27. *Soit G un groupe commutatif fini, $a, b \in G$. Si $w(a) \wedge w(b) = 1$, montrer que $w(ab) = w(a)w(b)$. En déduire que dans le cas général (plus d'hypothèse sur les ordres), il existe un élément $c \in G$ d'ordre le PPCM de $w(a)$ et $w(b)$. En déduire que pour p premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique.*

Proof. Soit k l'ordre de ab. On a $(ab)^{w(a)w(b)} = 1$ donc $k|w(a)w(b)$.
Ensuite on écrit $1 = (ab)^{kw(a)} = b^{kw(a}$ donc $w(b)|kw(a)$. Puisque $w(a)$ et $w(b)$ sont premiers entre eux, on en déduit $w(b)|k$. De même $w(a)|k$. Là encore, $w(a)$ et $w(b)$ étant premiers entre eux, $w(a)w(b)|k$, et finalement $k = w(a)w(b)$.

On écrit $w(a) = m = p_1^{\alpha_1} \dots$ et $w(a) = n = p_1^{\beta_1} \dots$. On pose $\alpha'_i = \alpha_i$ si $\alpha_i \geq \beta_i$, 0 sinon. De même on définit β'_i. Cela fournit naturellement m' et n'. Remarquons que $m \vee n = m' \vee n'$. De plus $m'|m$ et $n'|n$. Les éléments $a' = a^{\frac{m}{m'}}$ et $b' = b^{\frac{n}{n'}}$ sont d'ordre premiers entre eux et ainsi $c = a'b'$ convient.

Puis pour la cyclicité, on a un élément d'ordre m le ppcm de l'ordre de tous les éléments. En particulier (petit théorème de Fermat), $m|p-1$. Mais chaque élément vérifie $x^{p-1} = 1$ (petit théorème de Fermat) donc $p-1|m$. Bref $p-1 = m$. □

Chapter 4

Linear Algebra

4.1 Vectorial spaces

Exercise 4.1.1. *Montrer que la commutativité de la loi + est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espace vectoriel.*

Proof. Soit u, b deux vecteurs. On a

$$\begin{aligned} 0 &= u + (v - v) - u \\ &= (u + v) - v - u \\ &= (u + v) + (-1)u + (-1)v \\ &= (u + v) + (-1)(v + u) \\ &= (u + v) - (v + u) \end{aligned}$$

d'où $u + v = v + u$. □

Exercise 4.1.2 (lemme de Schur)**.** *Soit E un espace vectoriel et $u \in (E)$. On suppose que $\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K}\ u(x) = \lambda_x x$. Montrer que u est une homothétie.*

Proof. Soit $x, y \in E$ non nuls. On va montrer que $\lambda_x = \lambda_y$. S'il existe $\mu \in \mathbb{K}$, $x = \mu y$, alors on a

$$\begin{aligned} \lambda_y y &= u(y) \\ &= \lambda_x \mu x \\ &= \lambda_x y \end{aligned}$$

d'où $\lambda_x = \lambda_y$. Sinon on regarde $z = x + y$.

$$\begin{aligned} \lambda_z(x + y) &= \lambda_x x + \lambda_y y \\ (\lambda_z - \lambda_x)x &= (\lambda_y - \lambda_z)y \end{aligned}$$

Et il suit de la liberté de (x, y) que $\lambda_x = \lambda_z = \lambda_y$. □

Exercise 4.1.3. *Déterminer α tel que*

$$F_\alpha = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + \alpha xy + y^2 = 0\}$$

soit un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Proof. Soit x non nul fixé. $x^2 + \alpha xy + y^2 = 0$ admet une solution réelle si et seulement si $\alpha^2 \geq 4$. Ainsi, pour $\alpha \in]-2, 2[$, $F_\alpha = \{(0, 0)\}$ convient. On vérifie que $|\alpha| = 2$ convient également. Puis si $\alpha^2 > 4$, il existe deux solutions distinctes y_1, y_2 à x non nul fixé. Si F_α est un espace vectoriel, alors $(x - x, y_1 - y_2) \in F_\alpha$mais cela est absurde. □

Exercise 4.1.4. *Soit F un sous-espace vectoriel strict de E. Déterminer Vect$(E \setminus F)$.*

Proof. Soit $a \in E \setminus F$ non nul. Soit $x \in E$. Si $x \in E \setminus F$, alors $x \in \text{Vect}(E \setminus F)$. Sinon $x = x + (a - a) = (x + a) - a$. Mais $x + a \notin F$ (sans quoi $a \in F$) et $-a \notin F$, donc $x \in \text{Vect}(E \setminus F)$. Bref $\text{Vect}(E \setminus F) = E$. □

Exercise 4.1.5. *Soit $E = \mathbb{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $a \in \mathbb{R}$ on note $E_a = \{f \in E \mid f(a) = 0\}$. Montrer que pour tout a, E_a est un sous-espace vectoriel de E. Soit $a \neq b$. Que dire de $E_a + E_b$?*

Proof. $E_a + E_b = E$. □

Exercise 4.1.6. *Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace non trivial de E. Déterminer l'ensemble des endomorphismes s'annulant sur le complémentaire de F.*

Proof. Soit u un tel endomorphisme. $Ker(u)$ est un sous-espace vectoriel s'annulant sur $E \setminus F$, donc sur $\text{Vect}(E \setminus F)$. Or avec 4.1.4, cet ensemble est E lui-même. Donc seul l'endomorphisme nul convient. □

Exercise 4.1.7. *Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $u \in (E, F)$ et V, W deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer*

$$u(V) \subset u(W) \Leftrightarrow V \subset W + Ker(u)$$

Proof. Le sens retour est immédiat. Montrons le sens direct. Soit $v \in V$. Il existe $w \in W$ tel que $u(v) = u(w)$, i.e. $v - w \in Ker(u)$. Il suit $v = w + z$ avec $z \in Ker(u)$, d'où le résultat. □

Exercise 4.1.8 (Suite des noyaux itérés)**.**

1. *Soit E un espace vectoriel, $u \in (E)$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $Ker(u^n) = Ker(u^{n+1})$. Montrer que pour tout $m \geq n$, $Ker(u^n) = Ker(u^m)$*
2. *Voir 4.1.16*

Proof.

1. Par récurrence, $x \in Ker(u^{n+k+1}) \Leftrightarrow u^k(x) \in Ker(u^{n+1}) \Leftrightarrow u^k(x) \in Ker(u^n) \Leftrightarrow x \in Ker(u^{n+k})$
2. Soit (d_k) la suite des dimensions de $Ker(u^k)$. On remarque $Ker(u^k) \subset Ker(u^{k+1})$, ce qui se traduit par le fait que (d_k) est croissante. De plus $d_n = n$, et pour tout $m \geq n$, $d_m = n$, et pour tout $m < n$, $d_m < n$. Ensuite, si (d_k) n'est pas strictement croissante sur $[\![0, n-1]\!]$, avec la question 1 (d_k) est stationnaire et n'atteint pas n, ce qui est absurde. Donc (d_k) est strictement croissante sur $[\![0, n-1]\!]$, à valeur dans $[\![0, n-1]\!]$. Il n'y a qu'une seule possibilité : $d_k = k$ pour $k \leq n$.

□

Exercise 4.1.9. *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espace vectoriels de E. On suppose $\mathcal{F}$ filtrante, i.e. $\forall i, j$, $\exists k$ tel que $F_i \cup F_j \subset F_k$. Montrer que $\bigcup_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Proof. Il contient 0. Puis soit $x, y \in \bigcup_{i\in I} F_i$. Il existe i, j tels $x \in F_i$ et $y \in F_j$. De là $x, y \in F_k$ puis $x + \alpha y \in F_k \subset \bigcup_{i\in I} F_i$. Cela conclut. □

Exercise 4.1.10. *Montrer que si un $\mathcal{K}$-espace vectoriel E est réunion d'une famille finie de sous-espaces différents de E, alors le corps $\mathcal{K}$ est fini.*

Proof. Soit $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces propres de E de réunion E, et (quitte à éliminer les redondances) tels qu'aucun d'entre eux ne soit inclus dans la réunion des autres. Soit alors u un vecteur de E_1 qui ne soit pas dans la réunion des autres, et $v \notin E_1$. On regarde le sous-espace affine $v + \mathcal{K}u$. Il contient au plus un élément dans chaque E_i, et est disjoint de E_1, donc $\mathcal{K}$ contient au plus $n-1$ éléments. □

Exercise 4.1.11. *Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $p_a : x \mapsto |x - a|$. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les p_a pour $a \in [0, 1]$.*

Proof. Clairement ce sous-espace est inclus dans l'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions affines par morceaux continues, avec un nombre fini de morceaux. Montrons que le sev recherché est exactement $\mathcal{A}$. On représente une fonction f de $\mathcal{A}$ par les n points $(a_i, f(a_i))$ de rupture de pente, ainsi que $f(0)$ et $f(1)$. On raisonne par réccurrence sur n.
Pour $n = 1$, on résoud un système linéaire à trois inconnues.
Pour $n \geq 2$, on peut retirer la fonction f correspondant aux $n-1$ premiers points de représentation, puis utiliser le cas $n = 2$. □

Exercise 4.1.12. *Montrer que deux formes linéaires de même noyau sont colinéaires*

Proof. Il s'agit de trouver une combinaison linéaire annulant ϕ et ψ. Fixons a et remarquons astucieusement pour $x \in E$ que $\phi(x)\phi(a) - \phi(x)\phi(a) = 0$, soit $x\phi(a) - \phi(x)a \in Ker(\phi)$ donc $x\phi(a) - \phi(x)a \in Ker(\psi)$, i.e. $\psi(a)\phi - \phi(a)\psi = 0$. Il suffit alors de choisir a qui n'annule pas une des deux fonctions. Si cela n'est pas possible, elles sont toutes deux nulles donc a fortiori colinéaires. □

Exercise 4.1.13. *Exhiber un endomorphisme d'un espace vectoriel injectif et non surjectif, puis surjectif mais non injectif.*

Proof. Les tapis roulants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ □

Exercise 4.1.14. *Montrer que le produit de nilpotent n'est pas nécessairement nilpotent.*

Proof. Les tapis roulants de $\mathbb{R}^n$. □

Exercise 4.1.15. *Soit $n \geq 1$ et $\mathcal{K}$ un corps fini de cardinal $q \geq 2$*

1. *Déterminer le nombre de droites de $\mathcal{K}^n$.*

2. *Déterminer le nombre de plans de $\mathcal{K}^n$. (CORRECTION MISSING)*

Proof.

Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites. Une droite est de la forme $\mathcal{K}x$ avec x un vecteur non nul. Il est naturel de regarder

$$\phi : \begin{cases} K^n \setminus \{0\} & \to \mathcal{D} \\ x & \mapsto \mathcal{K}x \end{cases}$$

L'application ϕ est par construction surjective. Regardons le nombre d'antécédents d'un éléments de $\mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi(y) &\Longrightarrow \mathcal{K}x = \mathcal{K}y \\ &\Longrightarrow y = 1y \in \mathcal{K}x \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathcal{K}^*,\ y = kx \end{aligned}$$

Réciproquement, il est évident que $x = ky$ pour k non nul implique $\phi(x) = \phi(y)$. Ainsi tout élément de $\mathcal{D}$ possède exactement $q-1$ antécédent par ϕ. Ainsi

$$|\mathcal{D}| = \frac{|\mathcal{K}^n \setminus \{0\}|}{|K^*|} = 1 + q + \ldots + q^{n-1}$$

□

Exercise 4.1.16. *Soit E de dimension n et $u \in (E)$ nilpotent d'indice n. On note $F_k = Ker(u^k)$. Calculer $d_k = dim(F_k)$ pour tout k.*

Proof. Voir 4.1.8 □

Exercise 4.1.17. *Soit E, F des espaces vectoriels de dimension finie et $u \in (E, F)$. Montrer qu'il existe $v \in (F, E)$ tel que $u \circ v \circ u = u$.*

Exercise 4.1.18. *Montrer que la famille des fonctions $x \to \cos(\lambda x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ est libre.*

Proof. Ce sont des vecteurs propres de l'application $f \longmapsto -f''$. Sinon dériver n fois en 0 et faire tendre n vers $+\infty$. □

Exercise 4.1.19. *Même exercice avec $x \to \exp(\lambda x)$.*

Exercise 4.1.20. *Soit U et V des s.e.v. de E un espace vectoriel de dimension fini.. Montrer que U et V ont un supplémentaire commun si et seulement si $dim(U) = dim(V)$.*

Proof. Un sens est trivial. On raisonne par récurrence décroissante sur $dim(U) = dim(V)$. Si $dim(U) = dim(E)$ c'est fini. On suppose le résultat vrai pour tout sous espace de dimension plus grande que k. Soit $e \in E \setminus (U \cup V)$. On considère $U' = U + Vect(e)$ et $V' = V + Vect(e)$. Par hypothèse de récurrence, il existe S supplémentaire commun à U' et V'. De là $S + Vect(e)$ est supplémentaire commun à U et V. □

Exercise 4.1.21. *Déterminer le rang de la famille des vecteurs $X_{i,j} = e_i - e_j \in \mathbb{R}^n$.*

Proof. Il est majoré par n. Il est minoré par $n-1$ avec les $X_{1,j}$. Puis on remarque $X_{j,k} = X_{1,k} - X_{1,j}$. D'où un rang de $n-1$. □

Exercise 4.1.22. *Soit $a_0 < a_1 < \ldots < a_N$.*

1. *Montrer que l'espace E des fonctions continues sur $[a_0, a_N]$ affines par morceaux pour la subdivision $a_0, \dots, a_N$ est de dimension $N+1$.*

2. *Déterminer une base de E.*

Proof. Isomorphisme évident avec $\mathbb{R}^{N+1}$ par $f \mapsto (f(a_0), \dots, f(a_N))$. □

Exercise 4.1.23. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, A l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. Déterminer les applications f de A dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$\forall U, V \in A,\ f(U+V) = f(U) + f(V) - f(U \cap V)$$

Proof. Remarquons qu'on peut ajouter une constante à f sans modifier la propriété. On suppose donc $f(\{0\}) = 0$. On montre d'abord que les espaces de dimension 1 ont même image par f. Soit $a, b \in E$ non liés. D'après l'exercice 4.1.20, on peut trouver S supplémentaire à la fois de $Vect(a)$ et $Vect(b)$. On a alors $f(Vect(a)) = f(E) - f(S) = f(Vect(b))$. Notons λ cette image. Par une récurrence immédiate il vient $f(U) = \lambda dim(U)$. Bref, dans le cas général, $f(U) = \lambda dim(U) + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. □

Exercise 4.1.24. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in (E)$ nilpotente d'indice p. Notons $\Phi : v \in (E) \mapsto u \circ v - v \circ u$.*

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $v \in (E)$,*

$$\Phi^n(v) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v \circ u^k$$

2. *Montrer que Φ est nilpotente et majorer son indice de nilpotence.*

3. *Soit $a \in (E)$. Montrer qu'il existe $b \in (E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$.*

4. *En déduire l'indice de nilpotence de Φ.*

Proof.
1. Simple récurrence.

2. Avec $n = 2p$, et même $2p - 1$.

3. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de $Im(a)$, et $b_1, \dots, b_m$ tels que $a(b_i) = e_i$. Nécessairement $b_1, \dots, b_m$ est libre. On choisit b tel que $b(b_i) = e_i$, $b = 0$ ailleurs. Ce tel b convient.

4. On a $\Phi^{2p-2}(v) = (-1)^{p-1}\binom{2p-2}{p-1} u^{p-1} \circ v \circ u^{p-1}$. Avec v tel que $u^{p-1} \circ v \circ u^{p-1} = u^{p-1}$, il suit que Φ est d'indice de nilpotence exactement $2p - 1$.

□

Exercise 4.1.25. *Soit F, G deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in GL(\mathbb{R}^n)$ tel que $u(F) = G$.*

Proof. Même dimension, en envoyant la base de F sur la base de G. □

Exercise 4.1.26. *Soit E de dimension n et $f \in (E)$ un endomorphisme n-nilpotent. Montrer l'équivalence pour $g \in (E)$*

$$f \circ g = g \circ f \iff g \in Vect(Id, f, \dots, f^{n-1})$$

Proof. Il est classique de montrer l'existence de x tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E. On peut donc écrire $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$. Alors il vient que g et $\sum a_k f^k$ coïncident sur $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ donc sur E. Le sens retour est trivial. □

Exercise 4.1.27. *Soit E de dimension finie, F, G deux sev de E tels que $F+G=E$. Déterminer la dimension du sev de (E) composé des u tels que $u(F) \subset F$ et $u(G) \subset G$. Et si on impose u bijectif ?*

Proof. Isomorphisme avec $(F \cap G, F \cap G) \times (F', F) \times (G', G)$ où F' supplémentaire de $F \cap G$ dans F et G' de même. Si $F', G', F \cap G$ sont de dimension respective r, s, t, la dimension recherchée est donc $r(r+t) + s(s+t) + t^2 = r^2 + t^2 + s^2 + t(r+s)$. □

Exercise 4.1.28. *Soit p un projecteur de E. Définissons*

$$F_1 = \{f \in (E) \mid \exists u \in (E),\ f = u \circ p\}$$
$$F_2 = \{f \in (E) \mid \exists u \in (E),\ f = u \circ (Id - p)\}$$

Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans (E).

Proof. Classiquement $Ker(p)$ et $Ker(Id-p)$ sont supplémentaires dans E. Ainsi si $f \in (E)$, $f(x) = f(p(x) + x - p(x)) = f(p(x)) + f(x - p(x))$ d'où $F_1 + F_2 = E$. Si $f \in F_1 \cap F_2$, alors $Ker(p) \subset Ker(f)$ et $Ker(Id-p) \subset Ker(f)$ d'où $Ker(p) + Ker(Id-p) = E \subset Ker(f)$. Bref $f = 0$. □

Exercise 4.1.29. *Soit a, b deux scalaires distincts et $u \in (E)$ tels que*

$$(u - aId) \circ (u - b(Id)) = 0$$

1. *Montrer que $Ker(u - aId)$ et $Ker(u - bId)$ sont supplémentaires.*
2. *Déterminer une expression simple de la projection de p sur $Ker(u - aId)$ parallèlement à $Ker(u - bId)$.*
3. *Montrer que $u = ap + b(Id - p)$. En déduire une expression de u^n pour tout n.*

Proof.
1. Ils sont trivialement en somme directe. Le lemme des noyaux permet d'obtenir directement le résultat mais ici on se contente de le faire à la main. On a $P(u) = 0$ avec $P = (X-a)(X-b) = P_1 P_2$. De plus $\frac{P_1}{b-a} + \frac{P_2}{a-b} = 1$. Ainsi pour tout $x \in E$, $x = \frac{u(x)-ax}{b-a} + \frac{u(x)-bx}{a-b}$.
2. On vérifie immédiatement que $\frac{u(x)-bx}{b-a}$ convient.
3. La vérification est immédiate en écrivant $Id - p = \frac{u-aId}{b-a}$, et on a $u^n = a^n p + b^n(Id - p)$. □

Exercise 4.1.30. *Soit p, q deux projecteurs sur le même espace (pas forcément parallèles). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer $\lambda p + (1-\lambda) q$ est un projecteur.*

Proof. Il suffit de remarquer que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$. □

Exercise 4.1.31. *Soit p, q deux projecteurs qui commutent. Montrer que $Ker(p+q) = Ker(p) \cap Ker(q)$.*

Proof. Une inclusion est évidente. Pour l'autre on écrit $p(x)+q(x)=0$ donc en composant pas p et q on $p(x)+q\circ(p(x))=0$ et $q(x)+q\circ p(x)=0$. Bref$p(x)=q(x)=0$. □

Exercise 4.1.32. *Soit p,q deux projecteurs. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=q\circ p=0$.*

Proof. Un sens est évident. Pour l'autre on a $p\circ q+q\circ p=0$. En composant une fois par p à gauche, une autre fois à droite, il vient que $p\circ q=q\circ p$. Cela conclut facilement. □

Exercise 4.1.33. *Soit p un projection et $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\notin\{0,1\}$. Montrer que $p-\lambda Id$ est inversible et calculer son inverse.*

Proof. $\frac{X^2+X}{\lambda^2-\lambda}-1$ annule $p-\lambda$. □

4.2 Matrices

Exercise 4.2.1. *Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (les matrices qui commutent avec tout le monde).*

Proof. Soit A une matrice du centre. Soit $1\le i,j\le n$. $(E_{i,j}A)_{k,l}=\sum_{u=1}^n\delta_{k=i,u=j}A_{u,l}=\delta_{k=i}A_{j,l}$. Ainsi seule la ligne i de $E_{i,j}A$ est non nulle, et est égale à la ligne j de A. De même, seule la colonne j de $AE_{i,j}$ est non nulle, et est égale à la i-ième colonne de A. Ainsi $AE_{i,j}-E_{i,j}A=0$ implique $\forall i\neq j$, $A_{i,j}=0$ et $A_{i,i}=A_{j,j}$. Ainsi les seules matrices possibles sont les λI_n, et on vérifie qu'elles conviennent. □

Exercise 4.2.2. *Soit $E=Vect(\sin,\cos,ch,sh)$. Donner la matrice de l'opérateur de dérivation dans la base canonique $\mathcal{B}=(\sin,\cos,ch,sh)$.*

Proof.

$$\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

□

Exercise 4.2.3. *Calculer A^n pour $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$*

Proof. On écrit $A=I_3+B$, où $B=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ On calcule :

$$B^2=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

De là,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} \\ &= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Exercise 4.2.4. *Soit* $J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Calculer l'inverse de* J_n

Proof. C'est un cas particulier de $\begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a = 1$, et le cas particulier se calcule facilement. □

Exercise 4.2.5. *Soit* $A_n = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Calculer l'inverse de* A_n

Proof. Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Alors A est n-nilpotente et $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$. Par analogie avec les sommes géométriques réelles, l'inverse est $I - A$. □

Exercise 4.2.6. *Montrer l'équivalence*

$$A \textit{ antisymétrique } \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^T AX = 0$$

Proof. Pour le sens aller, on écrit $X^T AX = (X^T AX)^T = -X^T AX$.

On commence par le sens retour. Avec $X = e_i$, on obtient $A_{i,i} = 0$. Puis avec $i \neq j$,

$$\begin{aligned} 0 &= (e_i + e_j)^T A(e_i + e_j) \\ &= e_i^T Ae_i + e_j^T Ae_j + e_i^T Ae_j + e_j^T Ae_i \\ &= e_i^T Ae_j + e_j^T Ae_i \\ &= A_{i,j} + A_{j,i} \end{aligned}$$

□

Exercise 4.2.7. *Soit ϕ l'endomorphisme de transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $det(\phi)$.*

Proof. On peut être malin et dire que dans si B_1 est une base des matrices symétriques, B_2 des matrices antisymétriques, alors $B = (B_1, B_2)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans laquelle ϕ est diagonale, avec exactement $|B_2| = \frac{n(n-1)}{2}$ occurrences de -1. Sinon on exprime ϕ dans la base canonique. C'est un matrice de permutation d'un certain $\sigma \in S_{n^2}$, donc $det(\phi) = \epsilon(\sigma)$. La décomposition de σ en produit de cycles à support disjoint est un produit de transpositions. Seuls les $(E_{i,i})$ sont stables par σ, il y a donc $\frac{n^2-n}{2}$ transpositions, d'où le déterminant $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. □

Exercise 4.2.8. *Soit A un anneau, $n \in A$ un nilpotent. Montrer que $e_A + n$ est inversible. En déduire que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale est stable par passage à l'inverse.*

Proof. On s'inspire du développement en série entière de $\frac{1}{1+x}$: soit k l'ordre de nilpotence de n

$$(e_A + n)(\sum_{i=0}^{k-1}(-n)^i) = e_A + n^k = e_A$$

□

Exercise 4.2.9. *Soit $\Delta = Diag(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\Delta M - M\Delta$.*

Proof.

$$(\Delta M - M\Delta)_{l,k} = (a_l - a_k)M_{l,k}$$

□

Exercise 4.2.10. *Soit $x, \theta \in \mathbb{R}$. Calculer les puissances de la matrice*

$$\begin{pmatrix} x + \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & x - \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Proof. On note $M_\theta = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}$ Calculons ses puissances :

$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} M^m &= (xI_n + M_\theta)^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} M_\theta^k \\ &= (\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{2k} x^{m-2k}) I_n + (\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{2k+1} x^{m-2k-1}) M_\theta \end{aligned}$$

On doit pouvoir mettre en forme en regardant $S_1 = \sum_{k=0}^m \binom{m}{2k} x^{2k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^m \binom{m}{2k+1} x^{2k+1}$. On a

$$\begin{cases} S_1 + S_2 & = (1+x)^k \\ S_1 - S_2 & = (1-x)^k \end{cases}$$

D'où $S_1 = \frac{(1+x)^k + (1-x)^k}{2}$ et $S_2 = \frac{(1+x)^k - (1-x)^k}{2}$. En regardant la parité de m cela permet d'écrire une forme un peu plus compacte. □

Exercise 4.2.11. *Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation*

$$X + X^T = tr(X)A$$

Proof. On décompose X comme $S_X + A_X$ avec S_X symétrique et A_X antisymétrique. L'équation n'amène aucune condition sur A_X qui peut être choisi arbitrairement. Les seules solutions pour S_X sont $\mathbf{0}_n$ et, si $tr(A) = 2$, $A/2$. □

Exercise 4.2.12. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale dominante, i.e. $\forall i$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.*

Proof. Il suffit de montrer que A est injective. Or il vient très naturellement (écrire le système) que $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$. □

Exercise 4.2.13. *Déterminer les réels λ tels qu'il existe une matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^T = \lambda A$.*

Proof. En transposant l'équation on obtient la condition $\lambda^2 = 1$. On vérifie que $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ conviennent (matrices symétriques et antisymétriques). □

Exercise 4.2.14. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer JMJ où J est la matrice dont tous les cooefficients sont égaux à 1.*

Proof.

$$(\sum_{i,j} m_{i,j})J$$

(à vérifier). □

Exercise 4.2.15. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrer qu'il existe x_0 tel que $\mathcal{B}(x_0) = (u^{n-1}(x_0), \ldots, u(x_0), x_0)$ soit une base de $\mathbb{R}_n$. Quelle est la matrice de u dans cette base ?*

Proof. x_0 tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$ convient et existe par hypothèse.

$$mat_{\mathcal{B}(x_0)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

□

Exercise 4.2.16. *Déterminer le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $GL_n(\mathbb{R})$.*

Proof. Il s'agit de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en remarquant par exemple que $I_n + E_{i,j}$ est inversible. $\square$

Exercise 4.2.17. *Soit $M \in \mathbb{R}^n$ matrice définie par*

$$\begin{cases} M_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} \text{ si } i \leq j \\ M_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé. Calculer $u(P)$ pour tout P. En déduire que M est inversible et calculer son inverse. Montrer que $M^{-1} = \Delta M \Delta$ pour un certain Δ diagonale.

Proof. On calcule $u(X^k)$ pour $k \leq n$.

$$u(X^k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} X^i = (X+1)^k$$

D'où $u : P(X) \mapsto P(X+1)$. u est donc inversible, d'inverse $u^{-1} : P(X) \mapsto P(X-1)$ et l'inverse de M est définie par

$$\begin{cases} M^{-1}_{i,j} = (-1)^{(i-1)(j-1)} \binom{j-1}{i-1} \text{ si } i \leq j \\ M^{-1}_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On calcule pour $\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$, $(\Delta M \Delta)_{i,j} = d_i d_j M_{i,j}$. Ainsi $d_k = (-1)^{k-1}$ donne la bonne matrice diagonale. $\square$

Exercise 4.2.18. *Montrer que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A^{-1} est un polynôme en A.*

Proof. $M^0, M^1, \ldots, M^{n^2}$ est liée. Si $P(A) = 0$ on écrit $P = X^k \times Q$ avec $Q \wedge X = 1$. D'où l'existence de U, V tels que $U(X)Q(X) + XV(X) = 1$. Or par inversibilité de A^k, $Ker(Q(A)) = Ker(Q(A)A^k) = \mathbb{R}^n$ donc $Q(A) = 0$. De là $AV(A) = I_n$. $\square$

Exercise 4.2.19. *Montrer que tout hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ contient une matrice inversible.*

Proof. On écrit $f(A) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} A_{i,j}$ telle que $H = Ker(f)$. S'il existe un coefficient $\alpha_{i,j}$ en dehors de la diagonale, non nul, on prend $M = I + \alpha E_{i,j}$ avec α bien choisi pour que $M \in H$. Sinon on trouve une matrice inversible avec des 0 sur sa diagonale, elle est dans H. $\square$

Exercise 4.2.20. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ non inversible. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $A + \lambda B$ est inversible.*

Proof. Par équivalence en passant par J_r on se ramène à A triangulaire stricte. $B = I_n$ convient alors. $\square$

Exercise 4.2.21. *Montrer que toute matrice nilpotente est de trace nulle.*

Proof. On montre par récurrence qu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Le noyau est non trivial donc on peut choisir une base de sorte que la première colonne soit nulle. Puis si N est la matrice de taille $n-1$, en bas à droite, un calcul par bloc montre que N est nilpotente. □

Exercise 4.2.22. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour $r > 0$ suffisamment petit, $A + rI$ est inversible.*

Proof. $det(A + rI)$ est un polynôme en r, non nul d'après l'exercice des matrices à diagonales dominantes, donc ne s'annule pas sur une voisinage de 0, 0 exclu. □

4.3 Linear systems

Exercise 4.3.1. *Discuter de l'existence et de l'unicité d'un polygône à n côté où les milieux de chaque côté sont fixés.*

Proof. Le système est équivalent à l'existence d'affixe $z_1, \ldots, z_n$ tels que $\forall i$, $z_i + z_{i+1} = 2a_i$. Cela donne un système à résoudre. On trouve que si n est impair il y a toujours une unique solution, et que si n est pair, on a la condition de compatibilité $\sum(-1)^k a_k = 0$ et lorsqu'elle est remplie il y a une infinité de solutions. □

Exercise 4.3.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est de rang r si et seulement si A est équivalente à J_r. En déduire que A et A^t ont même rang.*

Proof. Corollaire du pivot de Gauss : équivalence à un certain J_s, puis même dimension de l'image : $r = s$. □

Exercise 4.3.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang r, $V \in GL_p(\mathbb{R})$ telle que AV soit échelonnée en colonnes. Montrer que*

1. *$C_1(AV), \ldots, C_r(AV)$ est une base de $Im(A)$.*
2. *$C_{r+1}(V), \ldots, C_p(V)$ est une base de $Ker(A)$.*

Proof.

1. La famille est libre car AV est échelonnée en colonne, elle est composée de vecteurs de $Im(A)$ donc libre et bonne dimension, donc base.
2. $AC_k(V) = C_k(AV)$ donc c'est une famillede $Ker(A)$, libre car V est inversible, et de bon cardinal. C'est une base.

□

Exercise 4.3.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et $U \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que UA est échelonnée en lignes. Montrer que*

1. *$X \in Ker(A)$ si et seulement si*
$$L_1(UA)X = 0, \ldots, L_r(UA)X = 0$$
2. *$Y \in Im(A)$ si et seulement si*
$$L_{r+1}(U)Y = 0, \ldots, L_n(U)Y = 0$$

Proof. 1. $X \in Ker(A) \Leftrightarrow UAX = 0 \Leftrightarrow \forall i,\ L_i(UA)X = 0 \Leftrightarrow \forall i \leq r,\ L_i(UA)X = 0$

2. On écrit $Y = AX$. Alors $UY = UAX$ donc $\forall i > r, L_i(UY) = 0$. D'où $Im(A) \subset \bigcap_{i=r+1}^{n} Ker(L_i(U))$.

   Or $L_{r+1}(U), \ldots, L_n(U)$ est libre donc $dim(\bigcap_{i=r+1}^{n} Ker(L_i(U))) = n - (n - r) = r = rg(A)$. D'où l'égalité.

□

Exercise 4.3.5. *Trouver une base du noyau et de l'image de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4.4 Reduction

Exercise 4.4.1. *Montrer que pour tout permutation $\sigma \in \Sigma_n$, la matrice de permutation P_σ est diagonalisable.*

Proof. Elle vaut l'identité élevée à une certaine puissance. □

Exercise 4.4.2. *Soit M la matrice de Zoro inversée (Z symétrique, avec des 1 sur la diagonale). Calculer les puissances de M. Montrer que M est semblable à $Id - e_{1,1} + e_{n,n}$ (matrice diagonale).*

Proof. On regarde le rang de $M, M - Id, M - 2Id$. □

Exercise 4.4.3. *Soit u un endomorphisme tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $Ker(u) = Ker(u^2)$.*

Proof. Sens retour. On exhibe $P = X\prod(X - a_i)$ scindé à racines simples et annulateur de u^2. On pose $Q = X^2\prod(X - \sqrt{a_i})(X + \sqrt{a_i})$ et $Q^* = \frac{Q}{X}$. On regarde $E = Ker(P(u^2)) = Ker(Q(u)) = \oplus_i Ker(u^2 - a_iI) + Ker(u^2) = Ker(u) \oplus_i Ker(u - \sqrt{a_i}I) + Ker(u + \sqrt{a_i}I)$. Donc $Q^*(u) = 0$ et Q^* est scindé à racines simples : u est diagonalisable.

Sens aller. On possède une base de vecteurs propres de u, donc stables par u^2. □

Exercise 4.4.4. *Montrer que la famille des $e^{\lambda x}$ est libre. Même question pour $\cos(\lambda x)$, $\lambda > 0$.*

Proof. Les voir comme des vecteurs propres. □

Chapter 5

Vectorial and functional analysis

5.1 Topology

Exercise 5.1.1. *Soit E un espace vectoriel normé. On considère A, B deux parties de E telles que $\inf_{x\in A, y\in B} ||x-y|| > 0$. Montrer qu'il existe U, V deux ouverts disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.*

Proof. $d = \inf_{x\in A, y\in B} ||x-y|| > 0$. Prendre $U = \mathcal{B}(A, \frac{d}{3})$ et $V = \mathcal{B}(B, \frac{d}{3})$. □

Exercise 5.1.2. *Soit E un espace vectoriel normé, $a \in E$, $r > 0$. Diamètre de $\mathcal{B}(a, r)$. Unicité du centre et du rayon.*

Proof. On montre que $d = diam(\mathcal{B}(a, r)) = 2r$ où $diam(X) = \sup_{x,y\in X} ||x-y||$. On a par inégalité triangulaire $d \leq 2r$. Ensuite soit $(x)_n \in \mathcal{B}(a, r)^{\mathbb{N}}$ telle que $||a - x_n|| \to r$. Alors pour tout n, $y_n = a - (x_n - a) \in \mathcal{B}(a, r)$ et $||y_n - x_n|| = 2||a - x_n|| \to 2r$.
Le rayon est unique par unicité du diamètre. Soit enfin b tel que $\mathcal{B}(a, r) = \mathcal{B}(b, r) = B$, et supposons par l'absurde $a \neq b$, et notons $l = ||a - b|| < r$. Notons alors $x = a + (r + \frac{l}{2})\frac{b-a}{l}$. Alors $||x - a|| = r + \frac{l}{2} > r$ donc $x \notin B$. Mais $||x - b|| = ||(r + \frac{l}{2})\frac{b-a}{l} - (b-a)|| = ||(r - \frac{l}{2})\frac{b-a}{l}|| = |r - \frac{l}{2}| = r - \frac{l}{2} < r$ donc $x \in B$, ce qui constitue une contradiction. □

Exercise 5.1.3. *Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme infinie $||u||_\infty = \sup_{\mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés ou non :*

$$A = \{\textit{suites croissantes}\} \quad B = \{\textit{suites convergentes vers } 0\}$$

L'ensemble suivant est-il compact ?

$$C = \{\ u \mid \forall n,\ |u_n| \leq \frac{1}{n+1}\}$$

Proof. A est fermé par passage à la limite des inégalités. B est fermé par critère de Cauchy (preuve en 2ε). C est fermé, montrons que C est compact. Soit $(u_n^{(i)})$ des éléments de C. Notons ϕ_k une extractrice telle que $(u_k^{(\phi_k(i))})_i$ converge, mettons vers u_k. Considérons alors $\phi(n) = \phi_1 \circ \ldots \circ \phi_n(n)$. On montre que $(u_n^{\phi(i)})$ converge vers (u_n). □

Exercise 5.1.4. *Trouver A tel que les ensembles suivants soient distincts $A, \overline{A}, \mathring{A}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{A}}$.*

Proof. $A = [1,2[\cup(]3,4[\cap\mathbb{Q})$ convient. ☐

Exercise 5.1.5.

Définition 1. Un espace E est dit de Baire s'il vérifie la propriété suivante : pour tous $(\Omega_n)_n$ des ouverts de E denses dans E, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ est dense dans E.

Définition 2. Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X converge dans X. Rappel : une suite (x_n) est dite de Cauchy si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p > n$, $d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$. Intuition : un espace métrique est complet s'il est "sans trou". Exemple : $\mathbb{R}$ est complet, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas complet.

Montrer le lemme de Baire

Lemme. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés de E tous non vides et tels que le diamètre $\delta(F_n)$ des F_n tende vers 0. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton. Rappel : le diamètre d'une partie A de X est $\sup_{a,b\in A} d(a,b)$.*

Montrer le théorème de Baire

Theorem. *Soit E un espace complet. E est de Baire.*

Proof. Démonstration du lemme : On prend $x_n \in F_n$, on montre que x_n est de Cauchy donc converge, mettons vers x (on utilise les inclusions et la décroissance du diamètre vers 0). On montre que x appartient à chacun des F_n donc à leur intersection (on utilise la fermeture des F_n). Enfin, le fait qu'il n'y a pas plus d'un élément dans l'intersection est évidente (diamètre tend vers 0) .

Démonstration du théorème : On se donne (Ω_n) comme dans l'énoncé. Soit $x \in E$ et $B = \mathcal{B}(x,\varepsilon)$ une boule ouverte de centre x. On veut montrer que B rencontre l'intersection des Ω_n. On construit une suite décroissantes de boules fermés $F_n = \mathcal{B}(x_n, r_n)$ dont le rayon tend vers 0 et vérifiant $F_n \subset B \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \ldots \cap \Omega_n$. Le lemme de Baire permet alors de conclure. On prend $F_0 = \overline{\mathcal{B}}(x,\varepsilon)$. $F_0, \ldots, F_n$ étant construits, on regarde $\Omega_{n+1} \cap \mathcal{B}(x_n, r_n)$, qui est non vide par densité de Ω_{n+1} et contient mettons x_{n+1}. Il existe un voisinage de x_{n+1} contenu dans Ω_{n+1}, mettons $\mathcal{B}(x_{n+1}, r_{n+1})$ avec $0 < r_{n+1} \leq r_n - d(x_n, x_{n+1})$. On pose $F_{n+1} = \overline{\mathcal{B}}(x_{n+1}, r_{n+1})$ ☐

Exercise 5.1.6 (Une application du théorème de Baire)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue vérifiant la propriété*

$$\forall a > 0,\ f(na) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$. Indication : la propriété de Baire a un énoncé équivalent en terme de fermés. C'est plutôt celle-ci qu'il faut utiliser.

Proof. Pour $\varepsilon > 0$ on regarde les fermés $F_p = \{a \geq 0 \mid |f(na)| \leq \varepsilon \forall n \geq p\}$. L'union des F_p est $\mathbb{R}$ d'après l'hypothèse, donc l'un au moins de ces F_p, mettons F_{p_0} est d'intérieur non vide et contient par exemple $[a,b]$ avec $a < b$, donc contient tous les $[na; nb]$. Fixons N suffisamment grand pour que $(N+1)a < Nb$ et soit $x > Nb$. Fixons aussi $n \geq N$ tel que $nb \leq x < (n+1)b$. Alors $x \in [nb, (n+1)b] \subset [(n+1)a; (n+1)b] \subset F_{p_0}$ donc $x \in F_{p_0}$. Si on rergarde de loin ce qu'on a montré :

$$\forall x \geq Nb,\ |f(x)| \leq \varepsilon$$

Ce qui conclut. ☐

Exercise 5.1.7. *Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme infinie $||u||_\infty = \sup_{\mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés ou non :*

i) L'ensemble des suites convergentes

ii) L'ensemble des suites qui admettent 0 pour valeur d'adhérence

iii) L'ensemble des suites périodiques. Dans cette question on suppose connu le fait que E est complet.

Proof.
Nécessairement la suite des limites converge (elle est de Cauchy) et de là l'ensemble est fermé.

ii) On se place suffisamment loin pour être proche de la suite limite. Tous les rangs proches de 0 le sont aussi pour la suite limite. L'ensemble est donc fermé.

iii) L'ensemble n'est pas fermé. On considère $v^{(n)}$ la suite indicatrice des multiples de n et $u^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{v^{(k)}}{2^k}$. Alors $(u^{(n)})_n$ est de Cauchy donc converge, mais la limite u n'est pas périodique car le k-ième élément donne, par son développement binaire, l'ensemble des diviseurs de k, donc une caractérisation de k (ou plus simplement u_0 est la seule occurrence de 1).

□

Exercise 5.1.8. *Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme infinie $||u||_\infty = \sup_{\mathbb{N}} |u_n|$. Montrer que E est complet.*

Proof. Chaque coordonnée converge, mettons vers u_k. u définie ainsi est bien bornée. Le critère de Cauchy amène la convergence. □

Exercise 5.1.9. *Soit K un compact et $f : K \to K$ 1-lipshitzienne. Soit $a \in K$. Montrer que $f_n(x) = f(\frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})x)$ admet un unique point fixe. En déduire que f admet un point fixe.*

Proof. Une fois x_n cet unique point fixe de f_n trouvé, on extrait $x_{\phi(n)}$ convergente vers x et on écrit $f(x) - x = f(x) - f(x_{\phi(n)}) + f(x_{\phi(n)}) - x_{\phi(n)} + x_{\phi(n)} - x$. La suite vient toute seule. □

Exercise 5.1.10. *Soit E un espace de Banach (vectoriel, normé, complet). Soit $\overline{\mathcal{B}}(a_n, r_n)$ une suite décroissante de fermée telle que le rayon r_n ne tend pas vers 0.*

i) Soit $a, b \in E$, $r, \rho > 0$ tels que $F_n = \overline{\mathcal{B}}(a, r) \subset \overline{\mathcal{B}}(b, \rho)$. Montrer que $||a - b|| \leq \rho - r$.

ii) Démontrer que a_n converge vers a, r_n converge vers $r > 0$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \overline{\mathcal{B}}(a, r)$.

Proof.
Si $a = b$ c'est fini. Sinon on note $l = ||b - a|| > 0$ et on regarde $x = a - r\frac{b-a}{l}$. $x \in \mathcal{B}(a, r)$ donc $x \in \mathcal{B}(b, \rho)$. De là

$$\begin{aligned} ||b - x|| &\leq \rho \\ \text{i.e. } ||b - a + \frac{r}{l}(b - a)|| &\leq \rho \\ ||b - a|| + r &\leq \rho \\ ||b - a|| &\leq \rho - r \end{aligned}$$

ii) Un corollaire de la question précédente est $\rho \geq r$. En particulier (r_n) décroît donc converge, mettons vers r. Puis avec la propriété précédente, (a_n) est de Cauchy, donc par complétude de E converge, mettons vers a.
Ensuite on montre que $\mathcal{B}(a,r) \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Soit donc $x \in B(a,r)$. Notons $\varepsilon = r - ||x-a|| > 0$.
Pour tout n assez grand, $||x-a_n|| \leq ||x-a|| + ||a-a_n|| = r - \varepsilon + ||a-a_n|| \leq r \leq r_n$ donc $x \in \bigcap\limits_{n\geq N} F_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ainsi $\mathcal{B}(a,r) \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
Puis comme une intersection de fermés reste fermée, $\overline{\mathcal{B}(a,r)} = \overline{\mathcal{B}}(a,r) \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
Pour l'inclusion inverse, on fixe $\varepsilon > 0$ et n tel que $||a-a_n|| \leq \varepsilon$ et $|r-r_n| \leq \epsilon$. Soit $x \in \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} F_i$.
Par def, $x \in F_n$ donc $||x-a_n|| \leq r_n$. De là

$$\begin{aligned} ||x-a|| &= ||x-a_n+a_n-a|| \\ &\leq ||x-a_n|| + ||a_n-a|| \\ &\leq r_n + \varepsilon \\ &\leq r + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset \mathcal{B}(a, r+2\varepsilon)$. Ceci étant vrai pour tout ε, on a l'inclusion inverse.

□

Exercise 5.1.11. *Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

Proof. $(\Rightarrow)$ est classique : la norme du reste tend vers 0 donc la série est de Cauchy donc converge.
$(\Leftarrow)$ Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. Par le critère de Cauchy on peut définir $j \mapsto n_j$ croissante de sorte que $y_j = x_{n_{j+1}} - x_{n_j}$ vérifie $||y_j|| \leq \frac{1}{2^j}$. Il vient que $\sum y_j$ est absolument convergente donc convergente. De là l'existence d'une extractrice $\phi : j \mapsto n_j$ telle que $x_{\phi(n)} \to x$. Immédiatement il suit $x_n \to x$. □

Exercise 5.1.12 (Compacité séquentielle $\Leftrightarrow$ compacité)**.**

Définition 3. Un espace métrique X est dit précompacte s'il admet, pour tout $r > 0$, un recouvrement fini par des boules de rayon r.

Soit (X,d) un espace métrique séquentiellement compact et $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. Montrer que (X,d) est précompact.
Montrer que

$$\exists r > 0,\ \forall x \in X,\ \exists i(x) \in I,\ B(x,r) \subset \Omega_{i(x)}$$

Conclure qu'on peut trouver $J \subset I$ fini tel que $(\Omega_j)_{j\in J}$ recouvre X.

Proof. La précompacité est évidente (sans quoi on peut trouver une suite d'élements tous distants d'au moins r deux à deux).

□

5.2 Sequence of functions

Exercise 5.2.1. *Déterminer les α tels que $f_n(x) = n^\alpha \cos^n(x)\sin(x)$ converge uniformément sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.*

Proof. Il y a convergence en 0 vers 0. Puis $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, $|\cos(x)| < 1$ donc $f_n(x) \to 0$. Bref il y a CVS vers 0. Puis on calcule

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n^\alpha(-n\cos^{n-1}(x)\sin^2(x) + \cos^{n+1}(x)) \\ &= n^\alpha \cos^{n-1}(x)(-n + (n+1)\cos^2(x)) \end{aligned}$$

s'annule en $x_n = \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$. où f_n est maximum. En inégrant le développement limité du DL de arctan on trouve

$$\arctan(x) \underset{0}{=} x + O(x^3)$$

D'où

$$\begin{aligned} f_n(x_n) &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}})\right)(1 - \frac{x_n^2}{2} + O(x_n^4))^n n^\alpha \\ &\sim \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{n}} n^\alpha \end{aligned}$$

Et ainsi $\sup f_n \to 0$ si et seulement si $\alpha < \frac{1}{2}$. □

Exercise 5.2.2 (Une limite classique)**.** *Soit $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer le mode de convergence de f.*

Proof. Après dérivation, f_n admet son maximum en n et $f_n(n) = \frac{n^n}{n!}e^{-n}$. Avec Stirling $f_n(n) \to 0 = f_{+\infty}$. Il y a bien CVU. □

Exercise 5.2.3. *Soit f_n une famille de fonction de X un ensemble vers $\mathbb{R}$, toutes bornées et telles que (f_n) converge uniformément vers $f : X \to \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que f est bornée.*
2. *Montrer que* $\sup_X f_n \to \sup_X f$.

Proof.
1. Immédiat
2. On prend n_ε tel que $\forall n \geq n_\varepsilon$, $||f - f_n||_\infty < \varepsilon$.

□

Exercise 5.2.4. *Déterminer l'adhérence de $\mathcal{C}_C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonctions continues à support compact dans $(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), ||.||_\infty$ espace des fonctions continues. Autrement dit trouver l'ensemble des fonctions continues f telle qu'il existe une suite (f_n) stationnaires à 0 en ∞ qui converge uniformément vers f.*

Proof. On montre que ce sont les fonctions nulles en ∞.

Si $(f_n) \in (\mathcal{C}_C(\mathbb{R}, \mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$ CVU vers f, alors en choisissant f_n proche de f à ε près, il vient que $|f|$ est plus petite que ε en ∞.

Si $f \to 0$ en ∞, alors on prend f_n égale à f sur $[-n, n]$ puis qui "descend être stationnaire en 0". Il vient $||f - f_n|| < 2 \sup_{|x| \geq n} |f|$ et le membre gauche tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. $\square$

Chapter 6

Probabilities

6.1 Counting

Exercise 6.1.1. *Soit S de cardinal $n \geq 2$ et soit $A_1, ..., A_m$ des parties de S vérifiant : $\forall x, y \in S$ avec $x \neq y$, il existe i tel qu'on ait soit $x \in A_i, y \notin A_i$, soit $x \notin A_i, y \in A_i$. Montrer que $m \geq \log_2(n)$.*

Proof. À chaque élément x de S on associe une clef $\phi(x) = (\mathbb{1}_{x \in A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{x \in A_m})$. La condition de l'énoncé implique que ϕ est injective. Ainsi $|S| \leq |\{0,1\}^m|$, i.e. $n \leq 2^m$. □

Exercise 6.1.2. *Soit E un ensemble de cardinal n. Dénombrer les m-uplets $(X_1, X_2, \ldots, X_m) \in \mathcal{P}(E)^m$ tels que $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_m$.*

Proof. Pour chaque élément, on a $m+1$ choix d'appartenance (à personne, au dernier, aux deux derniers, ..., à tout le monde), d'où $(m+1)^n$. □

Exercise 6.1.3. *Soit E un ensemble de cardinal n, et soit $p \leq n$. Dénombrer les m-uplets $(X_1, X_2, \ldots, X_m) \in \mathcal{P}(E)^m$ tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{m} X_i$ est de cardinal p.*

Proof. À chaque élément on associe une clef d'appartenance à valeur dans $\{0,1\}^m$. Exactement p éléments ont la clef $(1, 1, \ldots, 1)$. Il y a $2^m - 1$ autres clefs possibles, d'où finalement $\binom{n}{p}(2^m - 1)^{n-p}$. □

Proof. On note $C_1, \ldots, C_k$ ces classes d'équivalences, c_i le cardinal de C_i et m_i le nombre de couples $(x,y) \in C_i^2$. On a $n = c_1 + \ldots + c_k$ et $m_i = c_i^2$. De là $km = k \sum\limits_{i=1}^{k} m_i = (\sum\limits_{i=1}^{k} 1^2)(\sum\limits_{i=1}^{k} c_i^2) \geq (\sum\limits_{i=1}^{k} 1 * c_i)^2 = n^2$ (inégalité de Cauchy-Schwartz). □

Exercise 6.1.4. *On dit que $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{N}^p$ est une p-décomposition de n si $n = a_1 + \ldots + a_p$. Si de plus $\forall i, a_i > 0$, on parle de p-décomposition stricte. Dénombrer les p-décompositions et les p-décomposition stricte.*

Proof. Pour les p-décompositions strictes. On écrit $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ et on transforme $p-1$ "$+$" en séparation. On touve donc $\binom{n-1}{p-1}$. Pour les p-décompositions, on a une bijection entre les p-décompositions et les p-décompositions strictes de $n+p$ et on trouve $\binom{n+p-1}{p-1}$ $\square$

Exercise 6.1.5. *Soit (a_i) une suite finie de $mn+1$ réels distincts. Montrer qu'il existe soit une sous-suite décroissante de longueur $m+1$, soit une sous-suite croissante de longueur $n+1$. Indication : Considérer α_i la longueur de la plus grande sous-suite croissante finissant en x_i, et β_i de la plus grande suite décroissante.*

Proof. $f(a_i) = (\alpha_i, \beta_i)$ est injective. Principe des tiroirs. $\square$

Exercise 6.1.6. *Trouver une relation de récurrence sur le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments. Rappel : une involution est sa propre biijection réciproque.*

Proof. $u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n$ $\square$

Exercise 6.1.7. *Une barrière circulaire est constituée de 17 poteaux dont 5 sont pourris. Montrer qu'il existe un ensemble de 7 poteaux consécutifs dont 3 sont pourris.*

Proof. Soient $p_1, \ldots, p_{17}$ ces poteaux. À chaque poteau p_i, on associe l'ensemble E_{p_i} qui est l'ensemble des 7 poteaux consécutifs commençant à p_i. Remarquons que tout poteau p appartient à exactement 7 tels ensembles. On note également E l'ensemble des poteaux pourris. Ensuite on définit

$$\phi : \begin{cases} [\![1, n]\!] \to \mathbb{N} \\ i \longmapsto Card(E_{p_i} \cap E) \end{cases}$$

Supposons par l'absurde que pour tout i, $\phi(i) \leq 2$. On a alors

$$35 = \sum_{i=1}^{17} \phi(i) \leq \sum_{i=1}^{17} 2 = 34$$

De là une contradiction. $\square$

Exercise 6.1.8 (Chemins du plan)**.**

1. *Dénombrer le nombre de chemins de $\mathbb{Z}^2$ allant de $(0,0)$ à (a,b) en n'effectuant que des déplacements vers le nord ou vers l'est.*

2. *Combien a-t-on de suite à valeurs entières de taille b telle que $\forall n, |u_{n+1} - u_n| = 1$? Dans la suite, on considère des chemins n'effectuant que des déplacements NE ou SE.*

3. *Montrer que l'ensemble des chemins de (a, α) à (b, β) qui passent par l'axe des abscisse a même cardinal que l'ensemble des chemins de $(a, -\alpha)$ à (b, β) sans contrainte.*

4. *En déduire le nombre de chemins de (a, α) à (b, β) qui ne passent pas par l'axe. Montrer que*

$$|\{C_2 \neq 0, \ldots, C_{2n-2} \neq 0, C_{2n} = 0\}| = \frac{1}{2n-1}|C_{2n} = 0| = |C_{2n-2} = 0| - |C_{2n} = 0|$$

et

$$|\{C_2 \neq 0, \ldots, C_{2n-2} \neq 0, C_{2n} \neq 0\}| = |C_{2n} = 0|$$

Proof.

1. $\binom{a+b}{a}$

2.

$\square$

Exercise 6.1.9. *En combien de façon peut-on paver un damier $2 \times n$ avec des pièces 2×1 ?*

Proof. Soit C_n ce nombre. $C_1 = 1$, et $C_{n+2} = C_{n+1} + C_n$ donc c'est fibonacci. $\square$

Exercise 6.1.10. *On note $F_p^{(n)}$ l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. Déterminer $|F_p^{(n)}|$. Indication : pour un élément $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ de $F_p^{(n)}$, considérer $b_k = a_k - k + 1$.*

Proof. L'indication donne une bijection entre $F_p^{(n)}$ et les suites de p entiers de $[1, n-p+1]$ strictement croissantes. On trouve donc $\binom{n-p+1}{p}$ $\square$

Exercise 6.1.11. *Soit $\mathcal{P}$ un sous ensemble fini de $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers, et $n = |\mathcal{P}|$. Soit $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des entiers, dont les facteurs premiers sont contenus dans $\mathcal{P}$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble I non vide de $[\![1, n+1]\!]$ tel que $\prod_{i \in I} x_i$ soit un carré parfait.*

Proof. Il suffit que la valuation p-adique du produit soit paire, pour tout $p \in \mathcal{P}$. On va procéder par récurrence.

initialisation Pour $n = 1$, soit x_1 ou x_2 est de valuation p_1-adique paire et est un carré parfait, soit les deux ont une valuation p_1-adique impaire et leur produit est un carré parfait.

récurrence $X = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ sont donnés. On peut partitionner X selon la parité de la valuation p_n-adique de ses éléments : $X = X_0 \sqcup X_1$.
Si $|X_1| \leq 1$, on peut choisir n-éléments dans X_0, et par hypothèse de récurrence extraire de ses n éléments un produit dont la valuation p_i-adique est paire pour $i = 1, \ldots, n-1$. De plus, la valuation p_n-adique de ce produit est paire par construction de X_0, le produit est donc un carré parfait.
Sinon on peut choisir $x, y \in X_1$. Par hypothèse de récurrence cela fournit C_x (respectivement C_y) un sous ensembles de $X \setminus x$ (respectivement $X \setminus y$), tel que le produit P_x de ses éléments est de valuation p_i-adique paire pour $i = 1, \ldots, n-1$. Alors soit l'un des deux produits P_x ou P_y est de valuation p_n-adique paire, auquel cas ce produit est un carré parfait, soit les deux sont de valuation p_n-adique impaire. Dans ce dernier cas, on regarde $C = C_x \ XOR \ C_y$, c'est-à-dire que C contient les éléments de X qui sont dans C_x ou dans C_y, mais pas les deux. Il suffit alors de remarquer que pour tout $p \in \mathcal{P}$, la parité du nombre d'éléments de valuation p-adique impaire est la même dans C_x et dans C_y, et donc il y a un nombre pair de tels éléments dans leur XOR. Cela justifie que le produit des éléments de C est un carré parfait. $\square$